UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

Projeto e Análise de Algoritmos

Projeto de Algoritmos

Programação Dinâmica (continuação)

Prof. Humberto Brandão
humberto@dcc.ufmg.br

aula disponível no site:
http://www.bcc.unifal-mg.edu.br/~humberto/

Universidade Federal de Alfenas
Departamento de Ciências Exatas
versão da aula: 0.1

Programação Dinâmica

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

- **Relembrando...:**
  - A idéia da PD é solucionar problema menores;
    - De forma inteligente (sabendo que o problema menor ocorrerá pelo menos uma vez no problema original - maior);
  - Seus valores são armazenados em uma tabela;
    - Custo da solução e estrutura da solução;
  - Ao tentar resolver o problema maior, é procurada a ocorrência de problemas menores na tabela;
    - Se existe, então a solução é aproveitada;

Programação Dinâmica

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

- A PD apresenta soluções eficientes para problemas antes considerados complexos;

- Essa solução eficiente está baseada no princípio da otimalidade:
  - *Em uma seqüência ótima de escolhas ou de decisões cada sub-seqüência deve também ser ótima.*

- Todos os valores presentes na tabela representam escolhas ótimas para subproblemas.
  - É importante que os subproblemas ocorram no problema original;

Programação Dinâmica
O princípio da otimalidade

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

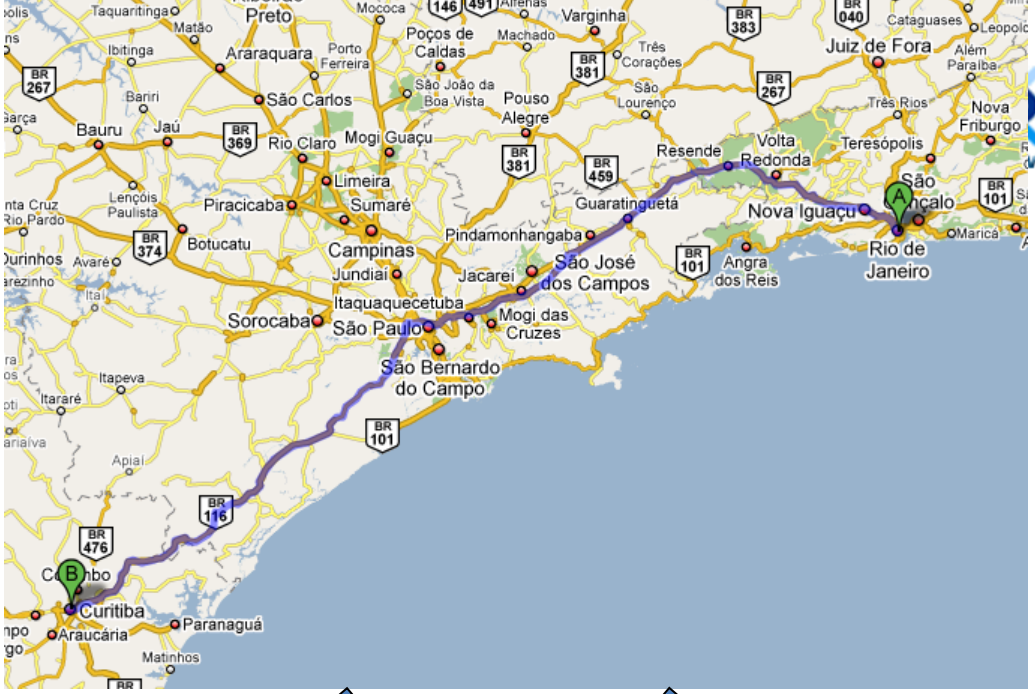
- O princípio da otimalidade não pode ser aplicado indiscriminadamente.

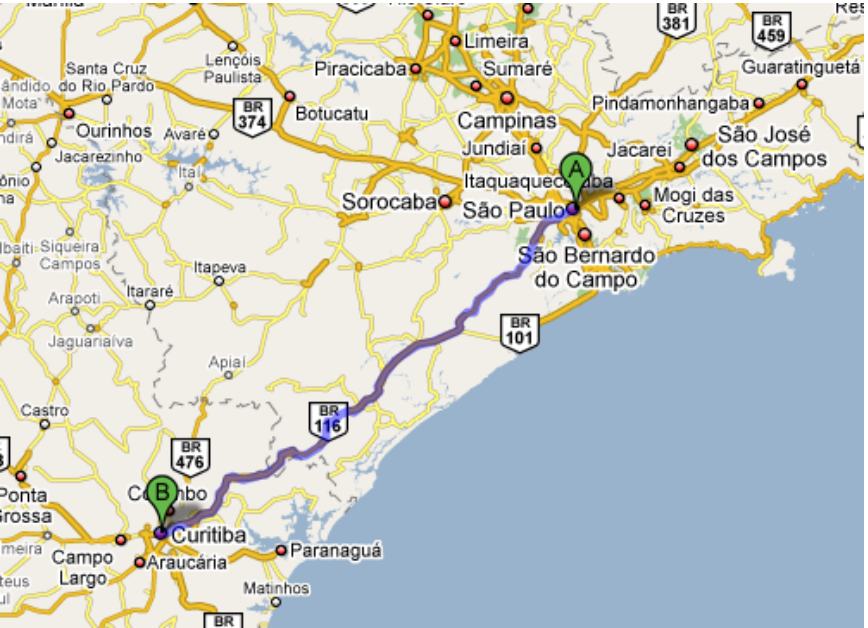
- Se o princípio não se aplica:
  - é provável que não se possa resolver o problema com sucesso por meio de programação dinâmica; ou
  - A modelagem está incorreta;

Programação Dinâmica
O princípio da otimalidade

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

- Exemplo do princípio da otimalidade:
  - suponha que o caminho mais curto entre o Rio de Janeiro e Curitiba passa por São Paulo. Logo,
    - o caminho entre RJ e São Paulo também é o mais curto possível;
    - como também é o caminho entre São Paulo e Curitiba;
    - Logo, o princípio da otimalidade se aplica.


Preto
Araraquara
São Carlos
Bauru
Jaú
Rio Claro
Limeira
Piracicaba
Sumaré
Campinas
Botucatu
Jundiaí
Jacarei
São José dos Campos
Itaquaquecetuba
Sorocaba
São Paulo
Mogi das Cruzes
São Bernardo do Campo
Pindamonhangaba
Guaratinguetá
Resende
Volta Redonda
Juiz de Fora
Teresópolis
Nova Friburgo
Nova Iguaçu
Rio de Janeiro
Angra dos Reis
Varginha
Poços de Caldas
Pouso Alegre
Curitiba
Araucária
Paranaguá
Matinhos
Itapeva
Apiaí
A
B
BR 116
BR 101
BR 381
BR 459
BR 476


Limeira
Piracicaba
Sumaré
Botucatu
Campinas
Jundiaí
Jacarei
São José dos Campos
Pindamonhangaba
Guaratinguetá
Sorocaba
São Paulo
Mogi das Cruzes
São Bernardo do Campo
Curitiba
Araucária
Paranaguá
Matinhos
Itapeva
Apiaí
Castro
Campo Largo
A
B
BR 116
BR 101
BR 381
BR 459
BR 476


Varginha
Poços de Caldas
Pouso Alegre
Juiz de Fora
Teresópolis
Nova Friburgo
Resende
Volta Redonda
Guaratinguetá
Nova Iguaçu
Rio de Janeiro
Angra dos Reis
Pindamonhangaba
São José dos Campos
Jacarei
Mogi das Cruzes
São Bernardo do Campo
A
B
BR 101
BR 381
BR 459

Programação Dinâmica
O princípio da otimalidade

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

- Em alguns casos, em que o princípio da otimalidade não é aplicável, sub-problemas possuem soluções que compõem a solução de um problema maior;
  - Mas não em todos os casos;
  - Pode ocorrer tal coincidência;

- Portanto, encontrar um subproblema de valor ótimo para o problema mestre, não quer dizer que a PD é aplicável;

- *Todo subproblema de qualquer problema que possui subestrutura ótima, compõe exatamente pelo menos uma solução do problema mestre;*

Programação Dinâmica
O princípio da otimalidade

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

- Exemplo de quando o princípio da otimalidade não é aplicável:

- Suponha que você precisa visitar o máximo de cidades possíveis um dia de serviço;
  - Você possui uma quantidade limitada de recursos. Por exemplo:
    - litros de gasolina;
    - Carros (2);

- Sub-problema 1: qual é a quantidade máxima de consumidores que o veículo 1 pode visitar viajando sem parar;
- Sub-problema 2: qual é a quantidade máxima de consumidores que o veículo 1 pode visitar viajando sem parar;

Programação Dinâmica
O princípio da otimalidade

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

- A composição da solução dos subproblemas 1 e 2 não necessariamente nos leva a solução ótima do problema mestre;

- Exemplo:
  - A quantidade de combustível é limitada;
    - Suponha: 20 litros no total;
      - Solução ótima do subproblema 1 utiliza 12 litros;
      - Solução ótima do subproblema 2 utiliza 11 litros;
  - A junção de P1 e P2 viola uma restrição rígida do problema mestre;

Programação Dinâmica
O princípio da otimalidade

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

- Alternativamente...
  - Você poderia determinar então que cada veículo utiliza no máximo 10 litros de combustível; (10 + 10 = 20 ☺)
  - E agora, aplica-se o princípio da otimalidade?

Programação Dinâmica
O princípio da otimalidade

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

- Alternativamente...
  - Você poderia determinar então que cada veículo utiliza no máximo 10 litros de combustível; (10 + 10 = 20 ☺)
  - E agora, aplica-se o princípio da otimalidade?

- Neste caso, a composição de P1 e P2 compõe uma solução do problema original (desde que cubram cidades diferentes);
- Mas, a solução do problema original pode não ser ótima;

Exercício individual para entregar

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

1) Suponha um grafo não orientado G = (V,A);
V está particionado em V_1 e V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$; $V_1 \cap V_2 = \varnothing$);
A está particionado em A_1 e A_2 e A_3 ($A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$; $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$);
As arestas de A_1 ligam vértices do conjunto V_1; (par não ordenado)
As arestas de A_2 ligam vértices do conjunto V_2; (par não ordenado)
As arestas de A_3 ligam vértices entre os conjuntos V_1 e V_2; (par não ordenado)

Suponha que você deseja encontrar a AGM através do algoritmo de Prim para o grafo G.

Você pode particionar o problema original e:
encontrar a AGM de G1 = (V1, A1)
encontrar AGM de G2 = (V2,A2)
depois ligar as AGMs de G1 e G2 através da aresta leve de A3, gerando uma árvore geradora de G.

A solução final é a AGM de G? Ou seja, o princípio da otimalidade é conservado neste caso? *Sim, Não, Por quê?*

Exercício individual para entregar

UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

2) Suponha o problema do caixeiro viajante, sendo representada sua demanda através do grafo completo $K_m=(V,A)$

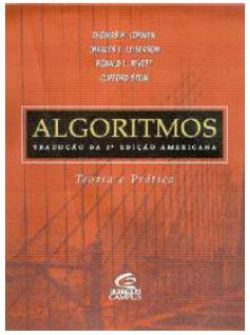
Suponha que o grafo K_m foi particionado em 3 grafos completos:
$K_a=(V_a,A_a)$
$K_b=(V_b,A_b)$
$K_c=(V_c,A_c)$
onde:

$V_a \cup V_b \cup V_c = V$
$V_c \cap V_c \cap V_c = \varnothing$
$A_a \cup A_b \cup A_c \; != A$

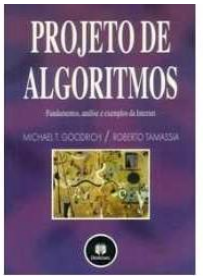
Se você resolve na otimalidade os PCVs para K_a, K_b e K_c, existe a possibilidade de juntar as soluções para gerar solução para o K_m?
Indique alternativas para isso.
Tais soluções seriam ótimas? Por quê?

Bibliografia

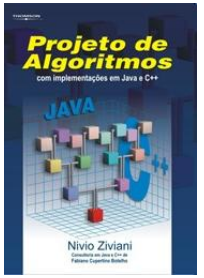
- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.



- TAMASSIA, ROBERTO; GOODRICH, MICHAEL T. (2004). Projeto de Algoritmos - Fundamentos, Análise e Exemplos da Internet.



- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;



- Material de aulas do Professor Loureiro (DCC-UFMG)
  - http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro/paa/