

Universidade Federal de Alfenas

Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 07 – Notações θ , Ω , ω , o
humberto@bcc.unifal-mg.edu.br



Última aula

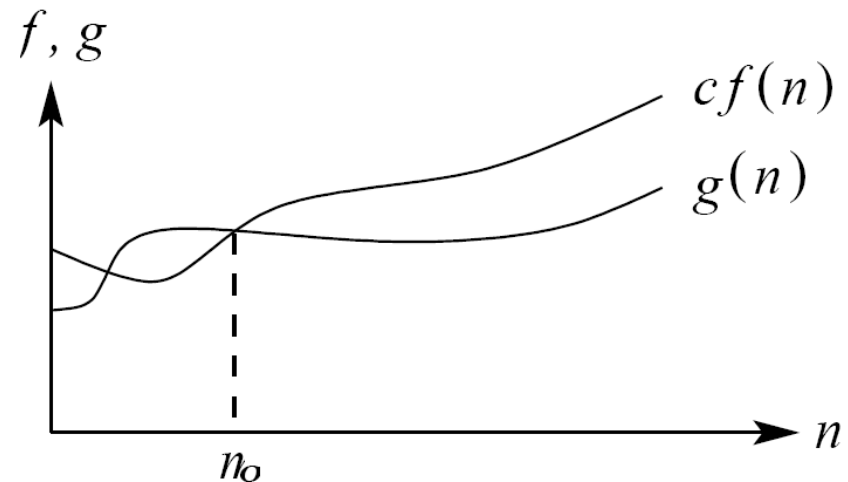
Notação O

- Uma função $f(n)$ domina assintoticamente outra função $g(n)$ se existem duas constantes positivas
 - c e n_0

Última aula

Notação O

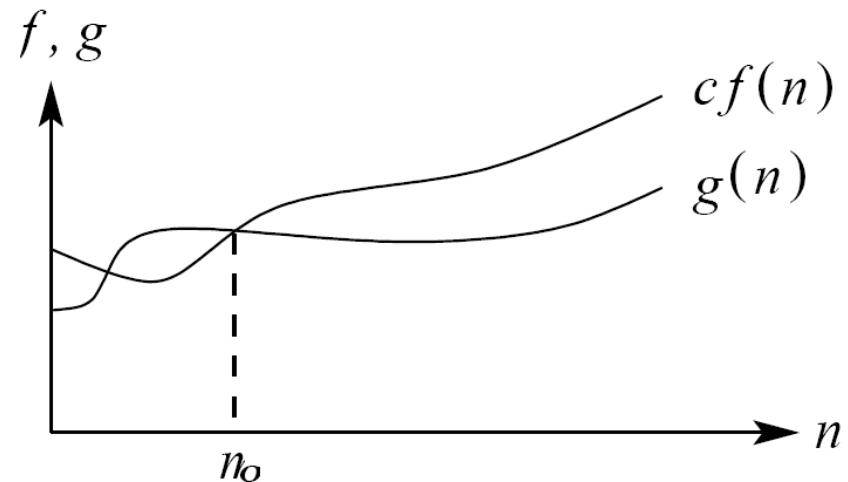
- Uma função $f(n)$ domina assintoticamente outra função $g(n)$ se existem duas constantes positivas
 - c e n_o
- tais que, para qualquer
 - $n \geq n_o$,



Última aula

Notação O

- Uma função $f(n)$ domina assintoticamente outra função $g(n)$ se existem duas constantes positivas
 - c e n_o
- tais que, para qualquer
 - $n \geq n_o$,
- temos
 - $g(n) \leq c \cdot f(n)$



Outras notações

- Assim como a notação O fornece uma maneira assintótica de dizer que uma função é “menor ou igual a” outra, existem outras notação que fornecem outras conclusões sobre a complexidade de algoritmos;

Outras notações

- Assim como a notação O fornece uma maneira assintótica de dizer que uma função é “menor ou igual a” outra, existem outras notação que fornecem outras conclusões sobre a complexidade de algoritmos;



Outras notações

- Assim como a notação O fornece uma maneira assintótica de dizer que uma função é “menor ou igual a” outra, existem outras notação que fornecem outras conclusões sobre a complexidade de algoritmos;
 - Θ
 - Ω

Outras notações

- Assim como a notação O fornece uma maneira assintótica de dizer que uma função é “menor ou igual a” outra, existem outras notação que fornecem outras conclusões sobre a complexidade de algoritmos;

- Θ

- Ω

- ω

Outras notações

- Assim como a notação O fornece uma maneira assintótica de dizer que uma função é “menor ou igual a” outra, existem outras notação que fornecem outras conclusões sobre a complexidade de algoritmos;

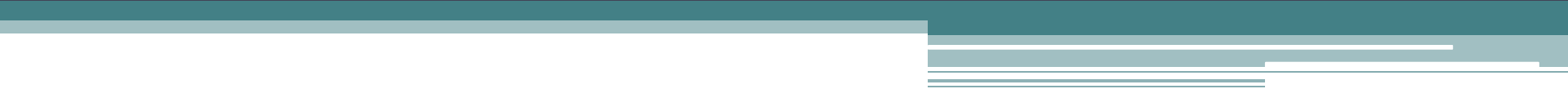
- Θ

- Ω

- ω

- O

Notação Ω



Notação Ω

- A notação Ω é bem parecida com a notação O ;
 - ‘ O ’ define um limite assintótico superior, e;
 - Ω define um limite assintótico inferior.

Notação Ω

- A notação Ω é bem parecida com a notação O ;
 - ‘ O ’ define um limite assintótico superior, e;
 - Ω define um limite assintótico inferior.
- Exemplos: $n^4 \in \Omega(n^3)$

Notação Ω

- A notação Ω é bem parecida com a notação O ;
 - ‘ O ’ define um limite assintótico superior, e;
 - Ω define um limite assintótico inferior.

- Exemplos:

$$n^4 \in \Omega(n^3)$$

$$n \in \Omega(1)$$

Notação Ω

- A notação Ω é bem parecida com a notação O ;
 - ‘ O ’ define um limite assintótico superior, e;
 - Ω define um limite assintótico inferior.

- Exemplos:

$$n^4 \in \Omega(n^3)$$

$$n \in \Omega(1)$$

$$3 \cdot \log(n) \in \Omega(\log(n))$$

Notação Ω

- A notação Ω é bem parecida com a notação O ;
 - ‘ O ’ define um limite assintótico superior, e;
 - Ω define um limite assintótico inferior.

- Exemplos:

$$n^4 \in \Omega(n^3)$$

$$n \in \Omega(1)$$

$$3 \cdot \log(n) \in \Omega(\log(n))$$

$$1 \in \Omega(1)$$

Notação Ω

- A notação Ω é bem parecida com a notação O ;
 - ‘ O ’ define um limite assintótico superior, e;
 - Ω define um limite assintótico inferior.

- Exemplos:

$$n^4 \in \Omega(n^3)$$

$$n \in \Omega(1)$$

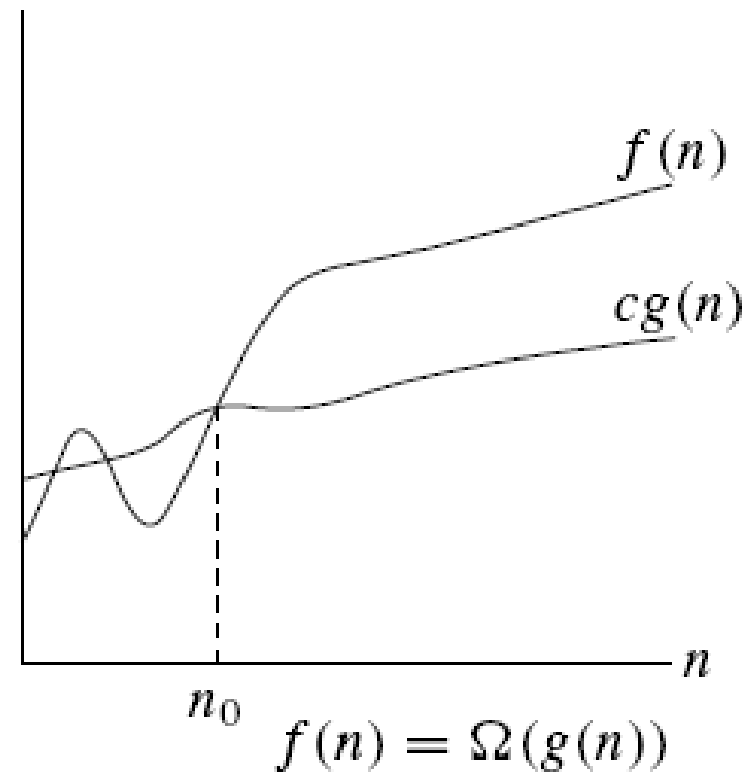
$$3 \cdot \log(n) \in \Omega(\log(n))$$

$$1 \in \Omega(1)$$

$$n! \in \Omega(2^n)$$

Notação Ω

- Limite assintótico inferior

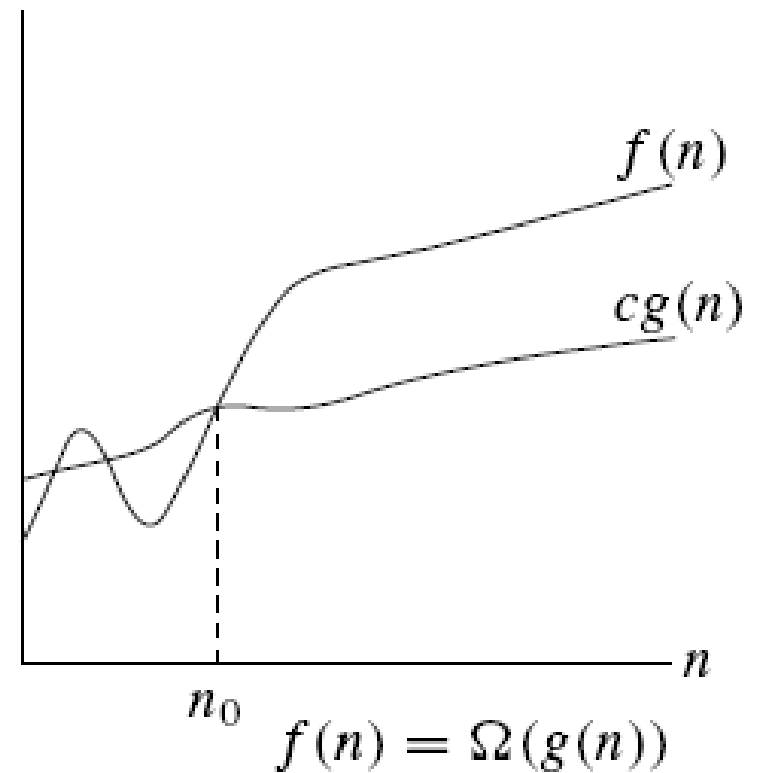


$$\Omega(g(n)) = \{f(n): \exists c \text{ e } n_0 > 0$$

$$| 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \quad \forall \quad n \geq n_0 \}$$

Notação Ω

- Limite assintótico inferior



Notação Ω

- Na prática a notação Ω não é vista sozinha em análises de algoritmos;

Notação Ω

- Na prática a notação Ω não é vista sozinha em análises de algoritmos;
 - Pelo motivo de não interessar para a análise de algoritmos;

Notação Ω

- Na prática a notação Ω não é vista sozinha em análises de algoritmos;
 - Pelo motivo de não interessar para a análise de algoritmos;
 - A notação O possui sua importância, pois o programador conclui que seu algoritmo é no máximo tão complexo a uma função.

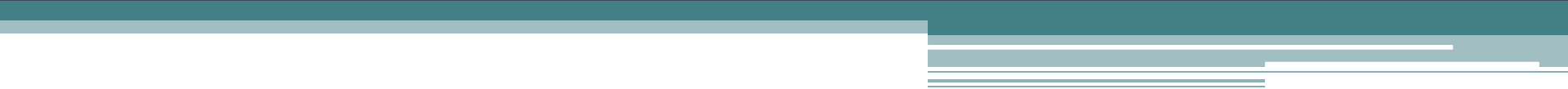
Notação Ω

- Na prática a notação Ω não é vista sozinha em análises de algoritmos;
 - Pelo motivo de não interessar para a análise de algoritmos;
 - A notação O possui sua importância, pois o programador conclui que seu algoritmo é no máximo tão complexo a uma função.
 - Mas no mínimo tão complexo, como a notação Ω descreve, não é importante para conclusões práticas sobre algoritmos.

Notação Ω

- Na prática a notação Ω não é vista sozinha em análises de algoritmos;
 - Pelo motivo de não interessar para a análise de algoritmos;
 - A notação O possui sua importância, pois o programador conclui que seu algoritmo é no máximo tão complexo a uma função.
 - Mas no mínimo tão complexo, como a notação Ω descreve, não é importante para conclusões práticas sobre algoritmos.
- Ω vem na maioria das vezes acompanhada a notação Θ ;
 - Como um complemento na análise, nunca sozinha...

Notação θ

A series of horizontal lines in teal and light blue colors, with varying lengths and offsets, creating a modern, layered effect across the middle of the slide.

Notação θ

- Conhecida também como “limite firme” ou “limite assintoticamente restrito”.

Notação θ

- Conhecida também como “limite firme” ou “limite assintoticamente restrito”,
- A notação O , apesar de fornecer informações sobre a complexidade do algoritmo, **nem sempre nos revela algo importante**;

Notação θ

- Conhecida também como “limite firme” ou “limite assintoticamente restrito”,
- A notação O , apesar de fornecer informações sobre a complexidade do algoritmo, **nem sempre nos revela algo importante**;
- Não faz sentido, para algum algoritmo, dizer que sua complexidade é por exemplo $O(n!)$.
 - Ou faz?

Notação θ

- Conhecida também como “limite firme” ou “limite assintoticamente restrito”,
- A notação **O**, apesar de fornecer informações sobre a complexidade do algoritmo, **nem sempre nos revela algo importante**;
- Não faz sentido, para algum algoritmo, dizer que sua complexidade é por exemplo $O(n!)$. Ou faz?

$$n \in O(n^3)$$

- Exemplos da falta de precisão de O:

$$n \in O(n^4)$$

$$n \in O(n^5)$$

$$n \in O(n^{1000})$$

$$n \in O(2^n)$$

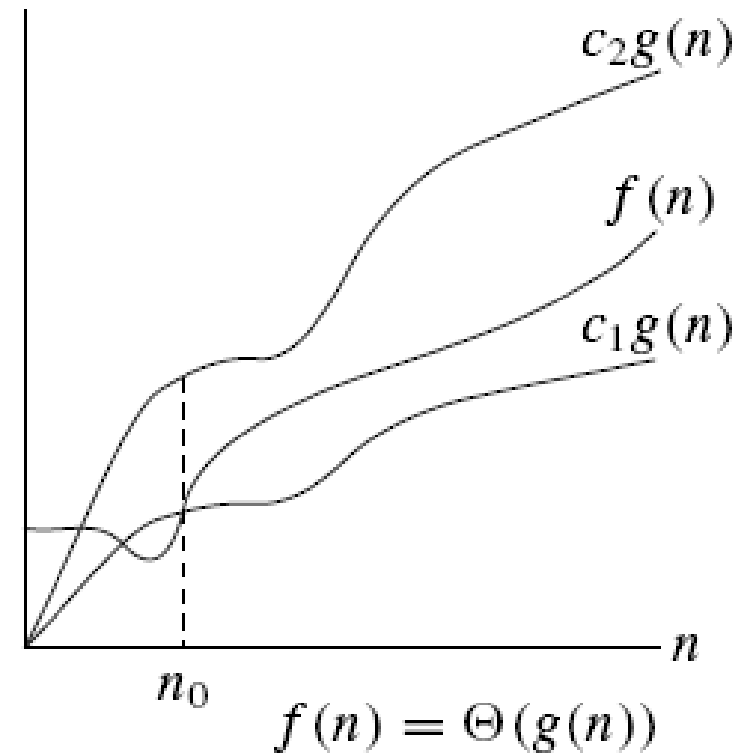
$$n \in O(n!)$$

Notação θ

- Uma função $f(n)$ pertence ao conjunto $\theta(g(n))$ se existem constantes positivas n_0 , c_1 e c_2

Notação θ

- Uma função $f(n)$ pertence ao conjunto $\theta(g(n))$ se existem constantes positivas n_0 , c_1 e c_2 tais que ela possa ser “imprensada” entre $c_1 \cdot g(n)$ e $c_2 \cdot g(n)$, para um valor de n suficientemente grande.



$$\Theta(g(n)) = \{f(n): \exists c_1, c_2 \text{ e } n_0 > 0 \\ | 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0\}$$

Notação θ

$$\Theta(g(n)) = \{f(n): \exists c_1, c_2 \text{ e } n_0 > 0 \\ | 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0\}$$

- Exemplo: $\frac{n^2}{2} - 3n \in \Theta(n^2)$
- Para isso, devemos definir constantes c_1 , c_2 e n_0 tais que:
$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$
- Encontre constantes que satisfaça as duas desigualdades...

Notação θ

- Exemplo de constantes:

$$\left(c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq c_2 n^2 \right) \quad \text{Dividindo por } n^2 \dots$$

$$= c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$$

Notação θ

- Exemplo de constantes:

$$\left(c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq c_2 n^2 \right) \quad \text{Dividindo por } n^2 \dots$$

$$= c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2 \quad \longrightarrow \quad c_1 = \frac{1}{14}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$n_0 = 7$$

- Portanto, se existem tais constantes

$$\frac{n^2}{2} - 3n \in \Theta(n^2)$$

Notação θ

- Observação:

$$f(x) \in \Theta(g(x))$$

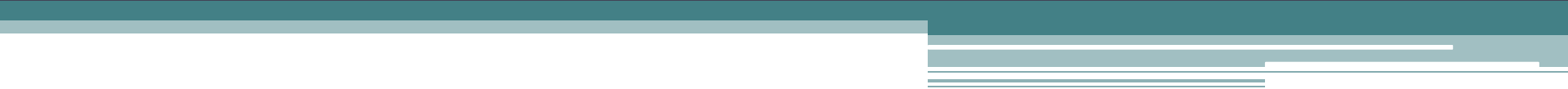
sse

$$f(x) \in O(g(x))$$

e

$$f(x) \in \Omega(g(x))$$

Notação o (*o minúsculo*)

A series of horizontal lines in teal and light blue colors, with varying lengths and offsets, creating a modern, layered effect across the middle of the slide.

Notação o

- O limite assintótico superior fornecido pela notação O (ó-zão) pode:

Notação o

- O limite assintótico superior fornecido pela notação O (ó-zão) pode:
 - Ser **assintoticamente restrito**;

Notação o

- O limite assintótico superior fornecido pela notação O (ó-zão) pode:
 - Ser assintoticamente restrito;
 - Não ser assintoticamente restrito;

Notação o

- O limite assintótico superior fornecido pela notação O (ó-zão) pode:

- Ser assintoticamente restrito;
- Não ser assintoticamente restrito;

- Exemplos:

- Assintoticamente restrito:

$$2 \cdot n^2 \in O(n^2)$$

-
- Não assintoticamente restrito:

$$2n \in O(n^2)$$

$$\log(n) \in O(c^n)$$

Notação o

- Todas as funções de O (ó-zão) que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a “ o ” (ó-zinho)

Notação o

- Todas as funções de O (ó-zão) que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a “o” (ó-zinho)

*se $f(n) \in O(g(n))$ e $f(n) \notin \Omega(g(n))$ então
 $f(n) \in o(g(n))$*

Notação o

- Todas as funções de **O** (ó-zão) que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a “o” (ó-zinho)

*se $f(n) \in O(g(n))$ e $f(n) \notin \Omega(g(n))$ então
 $f(n) \in o(g(n))$*

$$2n \in o(n^2)$$

$$\log(n) \in o(n)$$

Notação o

$$o(g(n)) = \{f(n): \forall c > 0, \exists n_0 > 0 \\ | 0 \leq f(n) < c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0\}$$



- Comparativo com a notação O; Não é $\leq$, é somente $<$

$f(n) \in O(g(n))$, o limite $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ se mantém válido
para alguma constante $c > 0$

$f(n) \in o(g(n))$, o limite $0 \leq f(n) < cg(n)$ é válido
para todas as constantes $c > 0$

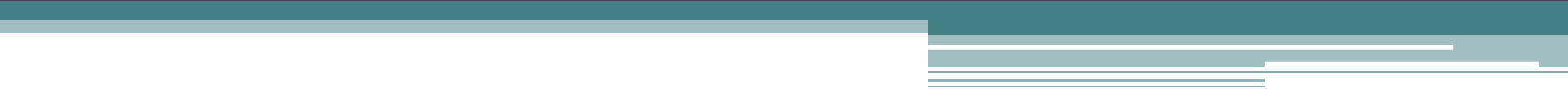
Notação o

- Facilitando o entendimento...

Se $f(n) \in o(g(n))$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Notação ω (*omega minúsculo*)

A series of horizontal lines in teal and light blue colors, with varying lengths and offsets, creating a modern, layered effect across the middle of the slide.

Notação ω

- O limite assintótico inferior fornecido pela notação Ω (omega-zão) pode:
 - Ser assintoticamente restrito;
 - Não ser assintoticamente restrito;

- Exemplos:

- Assintoticamente restrito: $2 \cdot n^3 \in \Omega(n)$

- Não assintoticamente restrito: $2 \cdot n^2 \in \Omega(n^2)$

Notação ω

- Todas as funções de Ω (omegazão) que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a ω

*se $f(n) \notin O(g(n))$ e $f(n) \in \Omega(g(n))$ então
 $f(n) \in \omega(g(n))$*

$$2n^2 \in \omega(1)$$

$$2n \in \omega(\log(n))$$

Notação ω

$$\omega(g(n)) = \{f(n): \forall c > 0, \exists n_0 > 0 \\ | 0 \leq c \cdot g(n) < f(n) \quad \forall n \geq n_0\}$$



Não é $\leq$, é somente $<$

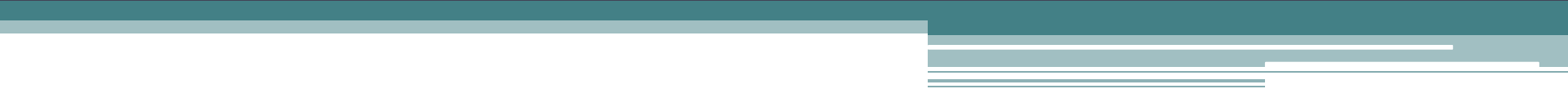
Notação ω

- Facilitando o entendimento...

Se $f(n) \in \omega(g(n))$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Exercícios

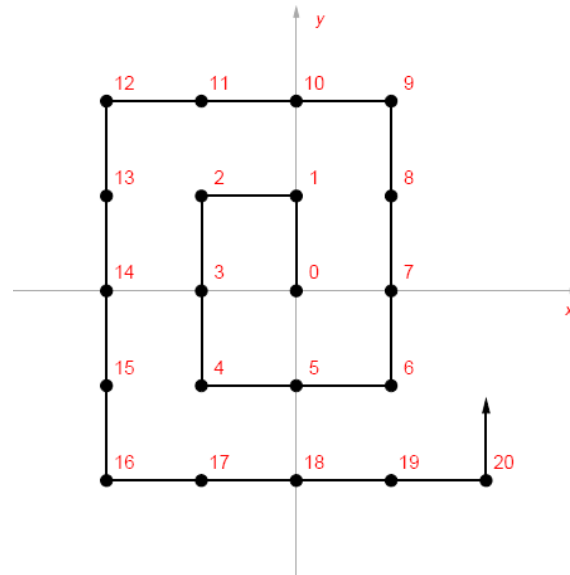


Exercícios - V ou F

- (a) se $f(n) \in \omega(g(n))$ então $f(n) \in \Omega(g(n))$
- (b) se $f(n) \in \Omega(g(n))$ então $f(n) \in \omega(g(n))$
- (c) se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) \in O(g(n))$
- (d) se $f(n) \in O(g(n))$ então $f(n) \in o(g(n))$
- (e) se $f(n) \in \Theta(g(n))$ então $f(n) \in O(g(n))$
- (f) se $f(n) \in \Theta(g(n))$ então $f(n) \in \Omega(g(n))$
- (g) se $f(n) \in \Theta(g(n))$ então $f(n) \in o(g(n))$
- (h) se $f(n) \in \Theta(g(n))$ então $f(n) \in \omega(g(n))$
- (i) $f(n) \in \omega(g(n))$ sse $g(n) \in o(f(n))$

Exercício para próxima aula

- Descreva e implemente 3 algoritmos para a seguinte espiral:



- Eles devem ter respectivamente as seguintes complexidades:
 - $\Theta(n)$;
 - $\Theta(\sqrt{n})$;
 - $\Theta(1)$.
- Eu informo n , e você informa as coordenadas x, y do n -ésimo ponto.

Leitura para próxima aula

- Livro: Algoritmos (Cormen)
 - 4 Recorrências;
 - 4.1 O método de substituição;
 - 4.2 O método de árvore de recursão
 - 4.3 O método mestre

Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.
- TAMASSIA, ROBERTO; GOODRICH, MICHAEL T. (2004). Projeto de Algoritmos - Fundamentos, Análise e Exemplos da Internet.

