

Universidade Federal de Alfenas

Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 03 – Fundamentos Matemáticos para PAA

humberto@bcc.unifal-mg.edu.br



Aula Passada...

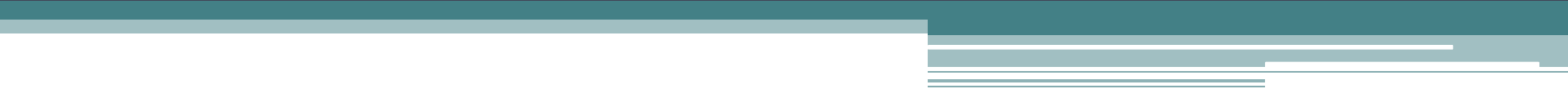
- Contexto histórico:

- Decidibilidade;
- O Teorema de Kurt Gödel;
- Máquina de Turing;
- Problemas Tratáveis e Intratáveis;
- Relação de Teoria de Linguagens e PAA;

Fundamentos de Matemática

- Nesta aula, revisaremos alguns conceitos fundamentais de matemática discreta que irão surgir em várias de nossas discussões;
 - Somatórios;
 - Logaritmos e expoentes;

Somatórios



Somatórios

- Uma notação que surge com frequência na análise de algoritmos e de estrutura de dados é o somatório, definido a seguir:

$$\sum_{i=a}^b f(i) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(b)$$

- Por que os somatórios são tão importantes na análise de algoritmos?

Somatórios

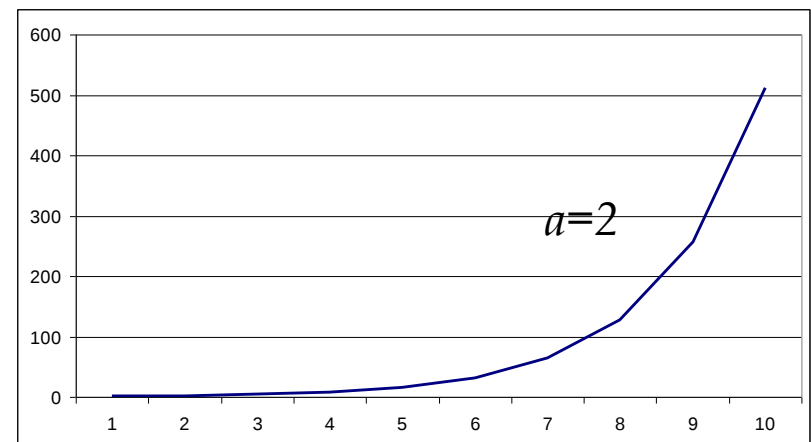
- Por que os somatórios são tão importantes na análise de algoritmos?
 - Somatórios surgem na análise de algoritmos e estrutura de dados porque o tempo de execução de laços pode ser representado naturalmente com somas.
 - Por exemplo, uma soma que surge freqüentemente na análise de algoritmos e estrutura de dados é a progressão geométrica.

$$\sum_{i=0}^n a^i = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n$$

Somatórios

$$\sum_{i=0}^n a^i = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n$$

- O somatório acima é chamado uma soma geométrica, porque cada termo é geometricamente maior do que o anterior se $a > 1$;
- Ou seja, os termos em uma soma geométrica exibem crescimento exponencial.



Somatórios

- Outra soma que surge em vários contextos é:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

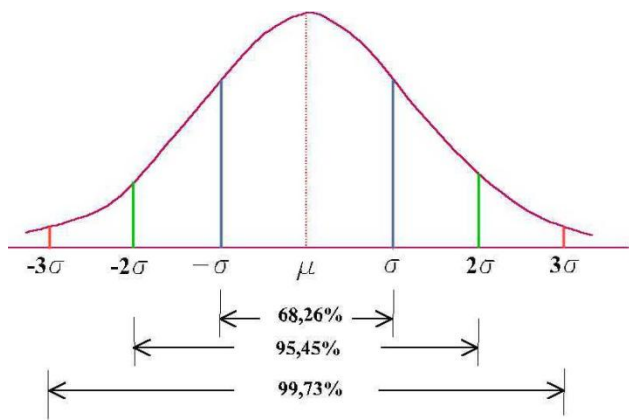
- Esta soma surge na análise de laços em casos em que o número de operações efetuadas dentro do laço aumenta em um valor fixo a cada iteração.
- Caso freqüente em algoritmos...

Somatórios

Curiosidade

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

- Essa soma possui uma história interessante. Em 1787, um professor alemão da escola primária passou um exercício para seus alunos de 10 anos de idade. Uma das criança afirmou ter a resposta. O professor não acreditou pois o aluno tinha a resposta em suas anotações sem nenhum calculo. **A resposta estava correta: 5050.** Aquele estudante era Carl Friedrich Gauss, que cresceria para ser um dos mais importantes matemáticos do século XIX.



Somatórios

- Acredita-se que Gauss obteve a resposta para a série utilizando a seguinte identidade:

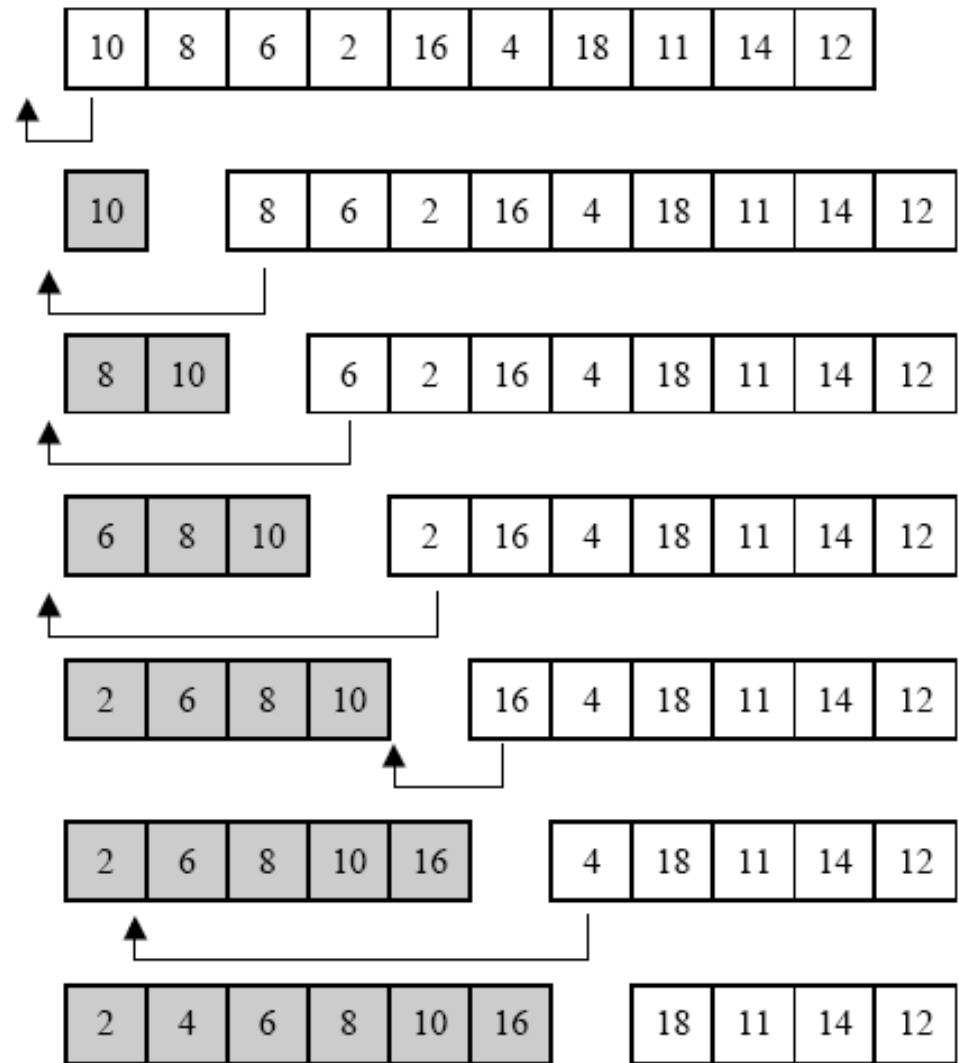
$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

Somatórios

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Exemplo desta soma presente na complexidade de algoritmos:
 - Algoritmo de **ordenação por inserção**:



Para entender, considere o pior caso

Somatórios

- E no algoritmo de seleção? Existe alguma relação semelhante?

Somatórios

$$\sum_{i=1}^n f(i)$$

- Propriedades:

- Se $n = 0$, então o valor do somatório é definido como 0;
- O valor de uma série finita é sempre bem definido, e seus termos podem ser somados em qualquer ordem (comum na computação *loops* com decremento);
- Dada uma sequência de números $a_1, a_2, a_3, \dots$, a soma infinita $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ pode ser escrita como:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

- Que é interpretada como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

Somatórios

- Propriedade da Linearidade:

- Para qualquer número real c e quaisquer seqüências finitas $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$,

$$\sum_{k=1}^n (c \cdot a_k + b_k) = c \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

- Esta propriedade de linearidade pode também ser explorada pra manipular somatórios que incorporam notação assintótica.

$$\sum_{k=1}^n \Theta(f(k)) = \Theta\left(\sum_{k=1}^n (f(k))\right)$$

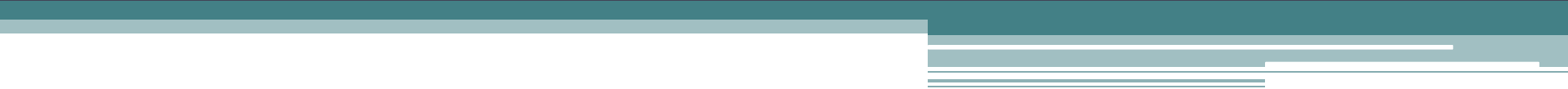
Somatórios clássicos

- Série aritmética: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Soma dos quadrados: $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Soma dos cubos: $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Somatórios

- Soma geométrica ou exponencial: $\sum_{i=1}^n x^i = 1 + x^1 + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$
- Série harmônica: $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$
 $= \ln n + O(1)$

Logaritmos e expoentes

A series of horizontal lines in teal, light blue, and white, stacked and offset to create a modern, layered effect across the bottom of the slide.

Logaritmos e expoentes

- Um dos interessantes aspectos da análise de algoritmos é a freqüente presença de logaritmos e expoentes, onde dizemos:

$$\log_b a = c \quad \text{se} \quad a = b^c$$

- É uma prática entre as pessoas da área da computação omitir a base, quando $b=2$:

$$\log_2(1024) = 10$$

Logaritmos e expoentes

- Existem regras importantes para os logaritmos: sejam a , b e c números positivos reais...

$$1. \log_b ac = \log_b a + \log_b c$$

$$2. \log_b \left(\frac{a}{c} \right) = \log_b a - \log_b c$$

$$3. \log_b a^c = c \cdot \log_b a$$

$$4. \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$5. b^{\log_c a} = a^{\log_c b}$$

Logaritmos e expoentes

- Expoentes:
sejam a , b e c números positivos reais...

$$6. (b^a)^c = b^{ac}$$

$$7. b^a b^c = b^{(a+b)}$$

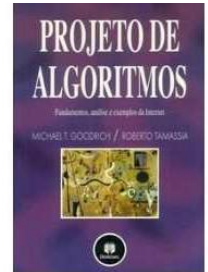
$$8. \frac{b^a}{b^c} = b^{(a-c)}$$

Exercícios:

- Devem ser entregues dia 15/03/2010

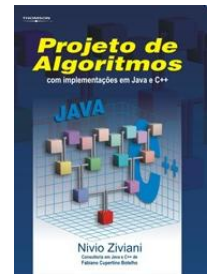
Leitura para próxima aula

- **TAMASSIA, ROBERTO; GOODRICH, MICHAEL T.** (2004). Projeto de Algoritmos - Fundamentos, Análise e Exemplos da Internet.



- **1.1 – Metodologias para análise de algoritmos**

- **ZIVIANI, N.** (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;



- **1.1 – Algoritmos, Estruturas de Dados e Programas;**
- **1.2 – Tipos de Dados e Tipos Abstratos de Dados;**
- **1.3 – Medida do Tempo de Execução de um Programa**

Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.
- TAMASSIA, ROBERTO; GOODRICH, MICHAEL T. (2004). Projeto de Algoritmos - Fundamentos, Análise e Exemplos da Internet.
- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;

