

Teoria dos Grafos Introdução Conceitos básicos

Prof. Humberto Brandão
humberto@unifal-mg.edu.br

aula disponível no site:
<http://bcc.unifal-mg.edu.br/~humberto/>

Universidade Federal de Alfenas
Departamento de Ciências Exatas
versão da aula: 0.2

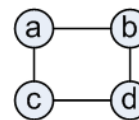
Grafos - Introdução

- Os grafos são formados por:

- **Vértices** - conjunto V ;
- **Arestas** - conjunto A ;

- Formalmente descrito como:

- $G=(V,A)$



G_0

Grafos simples

- Grafo simples:**

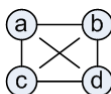
- Para qualquer conjunto V , denotamos por $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não ordenados de elementos de V ;

- $V=\{a, b, c, d\}$

- $V^{(2)} = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\}$

- Portanto, em um grafo simples: $A \subseteq V^{(2)}$

- “Um grafo é um par (V,A) , em que V é um conjunto arbitrário “**finito**”, e A é um subconjunto de $V^{(2)}$.”



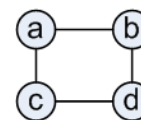
G_1

Grafos simples

- Neste outro exemplo, o grafo simples G_0 é denotado por:

- $G_0=(V,A)$, onde:

- $V=\{a,b,c,d\}$
- $A=\{(a,b), (a,c), (b,d), (c,d)\}$



G_0

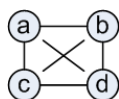
Grafos simples

- Em um grafo simples, se a cardinalidade de V é igual a n , qual é a cardinalidade do conjunto $V^{(2)}$?

- $|V| = n$

- $|V^{(2)}| = ????$

- Lembrando que $V^{(2)}$ são os pares não ordenados de V .



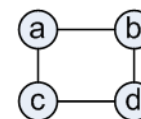
G_1

Grafos simples

- $|V| = n$
- $|V^{(2)}| = ????$

- Lembrando que $V^{(2)}$ são os pares não ordenados de V .

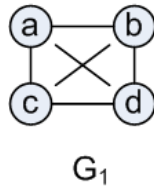
$$|V^{(2)}| = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$



G_0

Grafos simples

$$\begin{aligned}
 |V^{(2)}| &= \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^n i \right) - n \\
 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] - n \\
 &= \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) - n = \frac{n^2 + n - 2n}{2} \\
 &= \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}
 \end{aligned}$$



Grafos simples

- Por que isso é importante?
 - Memória pode ser um fator limitador dos sistemas computacionais...
 - É importante o sistemas saber se o computador possui memória suficiente para executá-lo...
 - Pode ser crítico em aplicações que utilizam grandes mapas, por exemplo.

Grafo complementar de um grafo simples

- Considere o grafo $G = (V, A)$
- Seu complemento é denotado por

$$\overline{G} = (V, V^{(2)} \setminus A)$$

Grafos simples

- Uma aresta como $\{a, b\}$ será denotada simplesmente por ab ou por ba .
- Diremos que a aresta ab incide em a e em b .
- Diremos que a e b são pontas da aresta;
- Se ab é uma aresta, vamos dizer que a e b são vértices vizinhos ou adjacentes.

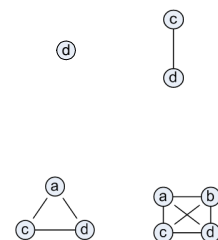
Grafos simples

- De acordo com nossa definição, um grafo simples não pode:
 - Ter arestas paralelas;
 - Ter arestas do tipo "laço". Ex.: bb , aa , hh , ...

Grafos simples completo

- Um grafo $G = (V, A)$
- é completo se somente se

$$|A| = |V^{(2)}|$$



Grafos simples vazio

- Um grafo

$$G = (V, A)$$

- é vazio se somente se

$$|A| = 0$$

$$A = \{ \}$$



Grafos simples completo Grafos simples vazio

- A expressão

$$G = K_n$$

- é uma abreviação para dizer que G é simples e completo e tem n vértices;

- E a expressão

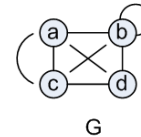
$$G = \overline{K_n}$$

- é uma abreviação para dizer que G é vazio e tem n vértices.

Grafos não orientados

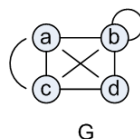
Grafos não orientados

- Estrutura bem parecida com os grafos simples;
- A diferença é que pode possuir arestas paralelas e também arestas "laço";



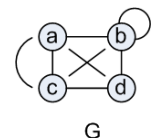
Grafos não orientados

- Aplicações:
 - Em alguns casos, como fluxo em redes, por exemplo, existem dois caminhos que o objeto em questão pode passar entre dois vértices;
- Exemplo:
 - Uma rede de computadores que possui dois canais de envio de informação;



Grafos não orientados

- Os grafos simples representam um subconjunto dos grafos não orientados;
- O autômato que reconhece todos os grafos não orientados, reconhece todos os grafos simples;
- Mas, o autômato que reconhece os grafos simples, não reconhece todos os grafos não orientados.



Grafos orientados simples

Grafos orientados

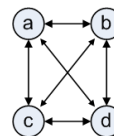
• Grafo orientado:

– Para qualquer conjunto V , denotamos por V^2 o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de V ;

– $V = \{a, b, c, d\}$

– $V^2 = \{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b), (b,d), (d,b), (c,d), (d,c)\}$

– Portanto: $A \subseteq V^2$

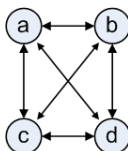


Grafos orientados

- Em um grafo orientado, se a cardinalidade de V é igual a n , qual é a cardinalidade do conjunto V^2 ?

- $|V| = n$
- $|V^2| = ????$

- Lembrando que V^2 são os pares ordenados de V .

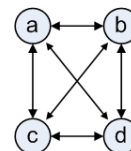


Grafos orientados

- $|V| = n$
- $|V^2| = ????$

- Lembrando que V^2 são os pares ordenados de V .

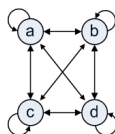
$$|V^2| = \sum_{i=1}^n (n-1) = n(n-1) \\ = n^2 - n$$



Grafos orientados com aresta "laço"

- Se os grafos orientados aceitam aresta do tipo laço,

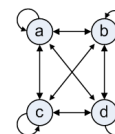
- O número máximo de aresta é ???



Grafos orientados com aresta "laço"

- Se os grafos orientados aceitam aresta do tipo laço,

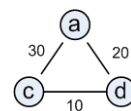
$$\sum_{i=1}^n (n) = n(n) \\ = n^2$$



Grafos Valorados

Grafos valorados

- São utilizados rótulos também nas arestas;



- Grafos valorados podem ser orientados e não orientados;

Grafos valorados

- Geralmente utilizamos rótulos em arestas para representar o custo de alguma coisa:

– Por exemplo, a distância para sair da cidade a e chegar na cidade b .

– Ou o tempo necessário...

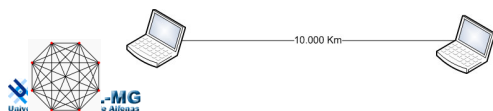
– Em Redes de Computadores, a aresta muitas vezes recebe o RTT (*round-trip time*), tempo de ida e volta...



Exercício em sala

Enviando um grafo pela rede...

- Você deseja enviar um grafo para outro computador;
- Considere o fluxo contínuo no envio de informação; (os dados não estão divididos em pacotes e não existem perdas)...
- Desconsidere a existência de roteadores no meio do caminho.



Enviando um grafo pela rede...

- Suponha que você possui em memória um grafo K_{2000} ;
- Cada aresta é representada por 3 inteiros:
 - Vértice de origem;
 - Vértice de destino;
 - Peso da aresta (exemplo: distancia entre dois pontos);
- Você precisa enviar o grafo K_{200} para outro computador que está a 10.000 Km de distancia;
- Sua largura de banda é 100 Kbps;
- A velocidade da luz na fibra é: $2,0 \cdot 10^8$ m/s;
- Qual é o tempo gasto para enviar todo grafo?