

Teoria dos Grafos

Um pouco de história...

Prof. Humberto Brandão
humberto@dcc.ufmg.br

aula disponível no site:
<http://bcc.unifal-mg.edu.br/~humberto/>

Universidade Federal de Alfenas
Departamento de Ciências Exatas
versão da aula: 0.2

Leonhard Euler

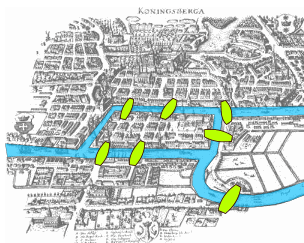


- Em 1735, Euler ganha fama mundial ao resolver um problema que por décadas foi desafio para os matemáticos da época (Série infinita da soma dos inversos dos quadrados - conhecido como problema da Basileia);
- A maioria dos grandes matemáticos de seu tempo tentaram sem êxito encontrar o resultado desta série infinita;
- Euler possuía apenas 28 anos na época;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

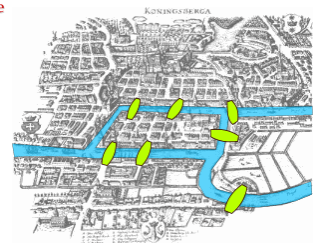
Leonhard Euler

- Um ano mais tarde (1736), Euler resolve o problema conhecido como as Sete pontes de Königsberg.
- É possível que uma pessoa faça um percurso na cidade de tal forma que inicie e volte a mesma posição passando por todas as pontes somente uma única vez?

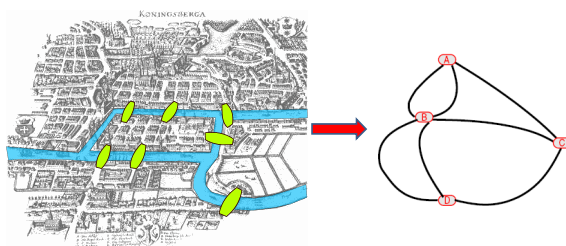


As Sete Pontes de Königsberg

- Euler resolve este problema simplificando a forma de se enxergar o mapa:
- Cada faixa de terra representa um ponto, e as pontes são ligações entre os pontos.

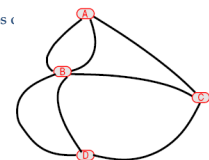


As Sete Pontes de Königsberg



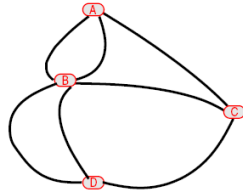
As Sete Pontes de Königsberg

- Obviamente, existem **duas respostas possíveis** para o dilema:
 - Ou Existe solução...**
 - Basta mostrar uma!!! Fácil... ☺
 - Será mesmo simples??? Para todo problema...
 - Ou não existe solução.**
 - Pode se mostrar enumerando todos e mostrar que todos falham;
 - Árvore de possibilidades;
 - ou de forma mais elegante, provando através das características do grafo que não existe solução para o problema.



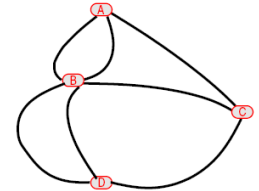
As Sete Pontes de Königsberg

- Aparentemente não existe solução;
- Partindo do vértice A, toda vez que se passa por qualquer outro vértice, duas arestas são usadas: a de "chegada" e a de "saída".
- Assim, se for possível achar uma rota que usa todas as arestas do grafo e começa e termina em A, então o número total de "chegadas" e "saídas" de cada vértice deve ser um valor múltiplo de 2.

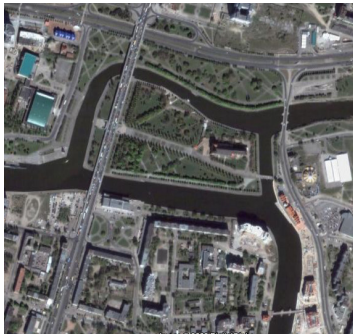


As Sete Pontes de Königsberg

- No entanto, temos:
 - $\text{grau}(A) = \text{grau}(C) = \text{grau}(D) = 3$;
 - $\text{grau}(B) = 5$.
- Assim, por este raciocínio não é possível ter uma solução para este problema.



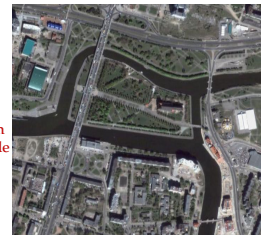
1736, Königsberg, Prússia Atualmente, Kaliningrad, Rússia



- Foto de 29/04/2007.
- A configuração das pontes está diferente.
- Mas agora existe caminho que satisfaz ao problema proposto no passado?

As Sete Pontes de Königsberg

- Verifique a beleza da solução de Euler...
- Mesmo para diferentes problemas, rapidamente verificamos que não existe tal ciclo...
 - Tal verificação pode ser efetuada em tempo polinomial, sem a necessidade de enumerar (implícita ou explicitamente todas as possibilidades)
- Quando existe tal ciclo, ele é classificado como ciclo Euleriano...



Leonhard Euler

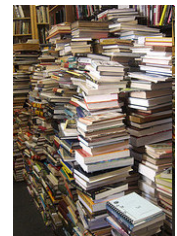
curiosidades...

- Euler é atualmente considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos;
- Produziu mais de 1100 artigos e livros;
- Durante os últimos 17 anos de vida, ele ficou praticamente cego, quando produziu quase que metade de seus trabalhos.



Um pouco de história...

- Apesar da beleza da solução de Euler para o problema das sete pontes, a solução foi um detalhe na imensidão de contribuições do matemático;
- A resolução de um *toy problem*, e não aparentava a princípio ser de grande relevância para a ciência;
- Seu método de abstração ficou durante 150 anos oculto em meio ao seu mar de livros e artigos.



Um pouco de história...

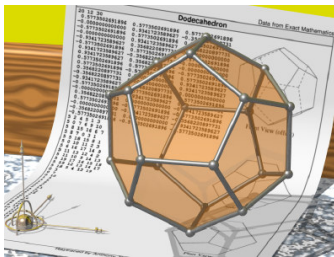
- Por causa disso, a **Teoria dos Grafos** foi redescoberta diversas vezes durante a história, ou seja, inúmeros pesquisadores chegaram ao mesmo modelo de abstração de Euler;
- É interessante observar que o período transcorrido, entre a demonstração de Euler e a última década do século XIX, viu apenas o surgimento de poucos trabalhos na área (em 150 anos!!!);

Um pouco de história...

- 1847 – Kirchhoff utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos, criando a teoria das árvores;
- 1857 – Cayley seguiu a mesma linha de Kirchhoff, mas de forma independente, aplicando a teoria em química orgânica (isômeros dos hidrocarbonetos);
- 1869 – Jordan estudou as árvores, de um ponto de vista matemático;

Um pouco de história...

- 1859 – Hamilton propôs um *toy problem*, a princípio sem aplicação prática. A busca por um circuito fechado em um dodecaedro regular;



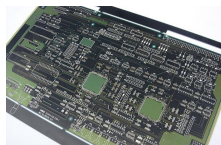
Um pouco de história...

- Diferentemente do problema de Euler (que não se repete aresta, e pode se repetir vértices), o problema de Hamilton não permite a repetição de vértices, e conseqüentemente também não se repetem arestas;
- Atualmente, o ciclo Hamiltoniano é utilizado na definição formal do problema do Caixeiro Viajante (um dos mais importantes e complexos problemas já descritos – definitivamente, o mais estudado problema de otimização combinatória);
- É interessante observar que os problemas de Euler e Hamilton encontraram aplicações práticas 100 anos mais tarde, na área de Pesquisa Operacional;

Um pouco de história...

Aplicação do ciclo Hamiltoniano

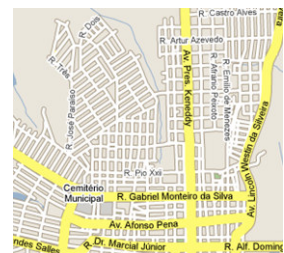
- Imagine que você precisa construir uma placa de circuito impresso.
- Esta possui inúmeros furos para o encaixe de seus componentes.
- Suponha que você possui a disposição um braço eletrônico para perfurar a placa e precisa descrever um algoritmo para encontrar a ordem perfuração dos buracos;



Um pouco de história...

Aplicação do ciclo Euleriano

- Imagine que você precisa entregar encomendas em todas as ruas de uma região de Alfenas.
- Existe a possibilidade de encontrar uma rota sem repetir ruas inutilmente?
 - Minimizando assim o trajeto a ser percorrido..



Um pouco de história...

- 1879 – Kempe procurou demonstrar a “Conjectura das 4 cores”. Trata-se de provar que todo mapa desenhado sobre uma superfície 2D e dividido em um número qualquer de regiões pode ser colorido com um máximo de 4 cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor;
- Mais tarde (1890) o matemático Heawood mostrou que a “prova” de Kempe estava errada;

Um pouco de história...

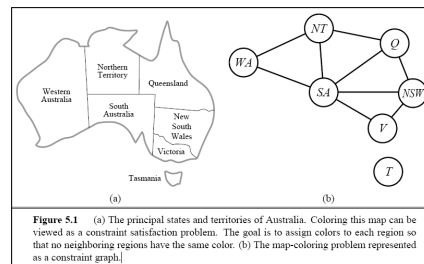


Figure 5.1 (a) The principal states and territories of Australia. Coloring this map can be viewed as a constraint satisfaction problem. The goal is to assign colors to each region so that no neighboring regions have the same color. (b) The map-coloring problem represented as a constraint graph.

Figura do livro
Artificial Intelligence – A modern approach
(AIMA)

Um pouco de história...

- 1880 – Tait divulgou também uma “prova” da coloração de mapas utilizando apenas 4 cores;
 - Infelizmente ela foi baseada em uma conjectura falsa;
- 1890 – Heawood mostrou que a “prova” de Kempe estava errada;
- 1890 – Heawood consegue uma prova utilizando 5 cores para coloração de qualquer mapa 2D;

Um pouco de história...

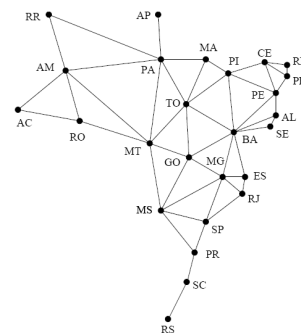
- A prova utilizando apenas 4 cores veio a tona somente em 1976;
 - 98 anos depois do problema proposto;
- Na prática, a busca por esta prova não teve impacto muito relevante;
- A vantagem foi o grande desenvolvimento na teoria dos grafos neste período, durante as inúmeras tentativas dos matemáticos sobre o problema;

Aplicações

Exemplos

Exemplo de aplicação: Representação de Localidades

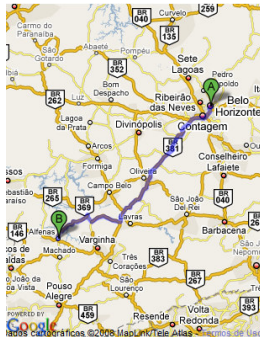
- A representação é base para inúmeras aplicações em grafos...



Exemplo de aplicação:

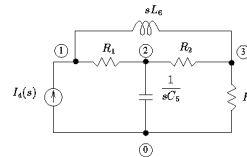
Caminho mínimo

- Exemplo:
 - Caminho mínimo entre BH e Alfenas calculado pelo *Google Maps*.
- O melhor algoritmo para este problema foi proposto por Dijkstra;
- O mesmo que propôs diversos algoritmos na área de S.O.;
- Defensor fiel da programação estruturada (sem nenhum tipo de desvio incondicional):
 - Segundo ele, facilita a depuração e entendimento.
 - Obviamente que o código em baixo nível gerado pelos compiladores precisam dos desvios incondicionais. Estes só não estão disponíveis em alto nível;



Exemplo de aplicação:

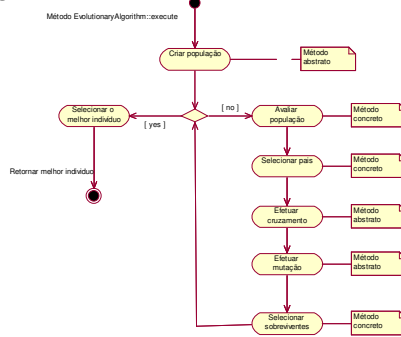
Circuitos elétricos



- Atualmente existem muitos problemas em aberto dedicados a prevenção de falhas no sistema elétrico de grandes metrópoles.

Exemplo de aplicação:

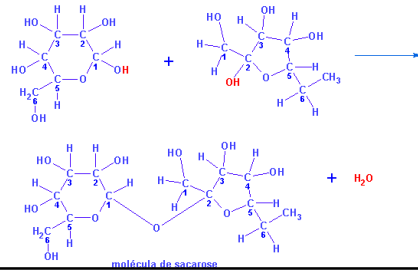
Diagrama de Estados



Exemplo de aplicação:

Química molecular

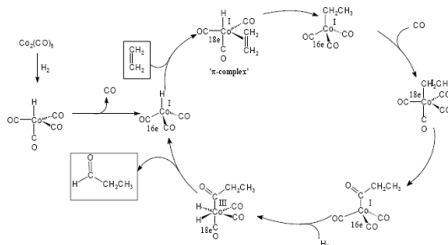
- Representação bidimensional de moléculas utilizando grafos...



Exemplo de aplicação:

Química – Ciclos catalíticos

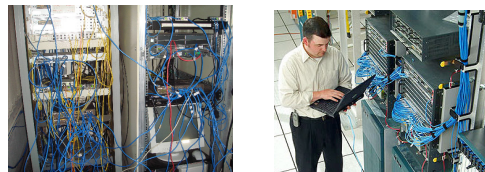
- Ciclos catalíticos...



Exemplo de aplicação:

Redes de computadores

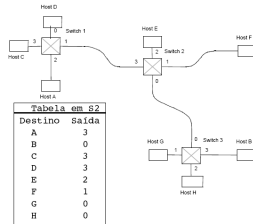
- Apesar das redes de computadores serem complexas no mundo real, onde inúmeros fatores descrevem o ambiente...



- É necessária uma forma de abstração para a eficiente comunicação dos computadores.

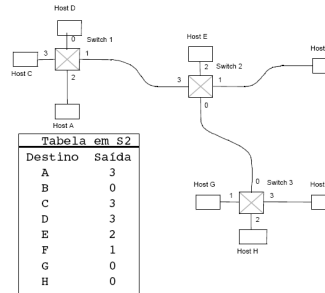
Exemplo de aplicação: Redes de computadores

- Redes de computadores utilizam tabelas de encaminhamento para o roteamento de pacotes...



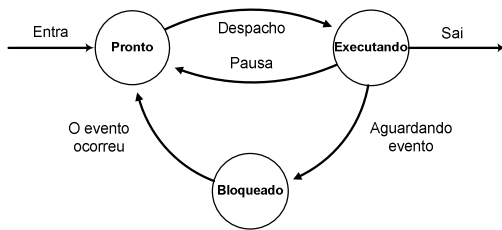
Exemplo de aplicação: Redes de computadores

- Que informações podemos utilizar para montar as tabelas de encaminhamento de cada switch?



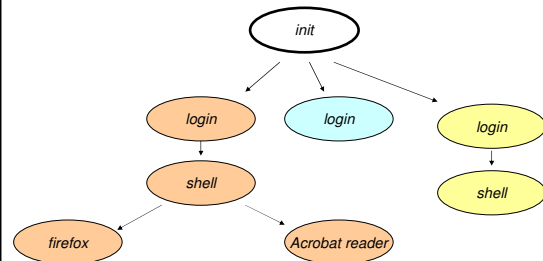
Exemplo de aplicação: Sistemas Operacionais

- Abstraindo... Entendendo os estados de processos/threads...



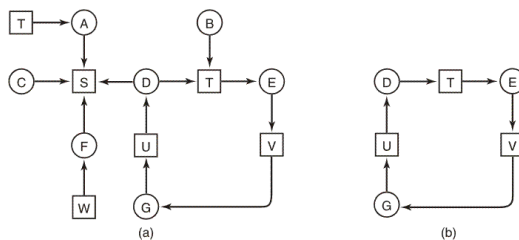
Exemplo de aplicação: Sistemas Operacionais

- Hierarquia de Processos – Árvores são grafos especiais...



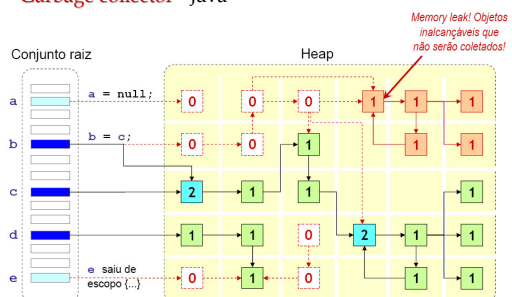
Exemplo de aplicação: Sistemas Operacionais

- Deteção de deadlock através de ciclo no grafo...



Exemplo de aplicação: Programação...

- Garbage collector - Java

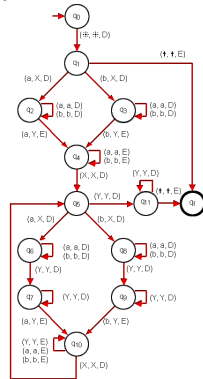


Exemplo de aplicação: Teoria da Computação

- Reconhecimento de textos de uma língua/linguagem qualquer.

– Ex.: C++, Java, Português...

- Aplicação:
 - Detecção de erros sintáticos em frases de um documento por Máquinas de Turing ou Máquina equivalente.



Exemplo de aplicação: Teoria da Computação

- Reconhecimento de linguagens...

Teoria de Autômatos: Linguagem formal e gramática formal			
Hierarquia Chomsky	Gramática	Linguagem	Reconhecedor
Tipo-0	Estrutura de frase	Rekursivamente enumerável	Máquina de Turing
–	Estrutura de frase	Rekursiva	Máquina de Turing
Tipo-1	Sensíveis ao contexto	Sensíveis ao contexto	Máquina de Turing com memória limitada
Tipo-2	Livre de contexto	Livre de contexto	Autômato com pilha
Tipo-3	Regular	Regular	Autômato finito

- Todas estas estruturas (reconhecedores) possuem representação através de Grafos.

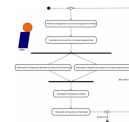
Exemplo de aplicação: Teoria da Computação

Teoria de Autômatos: Linguagem formal e gramática formal			
Hierarquia Chomsky	Gramática	Linguagem	Reconhecedor
Tipo-0	Estrutura de frase	Rekursivamente enumerável	Máquina de Turing
–	Estrutura de frase	Rekursiva	Máquina de Turing
Tipo-1	Sensíveis ao contexto	Sensíveis ao contexto	Máquina de Turing com memória limitada
Tipo-2	Livre de contexto	Livre de contexto	Autômato com pilha
Tipo-3	Regular	Regular	Autômato finito

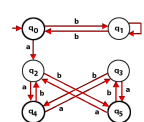
- Curiosidade: Recentemente uma tribo da Amazônia colocou em xeque toda teoria de Chomsky (a teoria, não a hierarquia..)
- Eles não conseguem gerar sentenças recursivas;
- <http://www1.folha.uol.com.br/folha/ciencia/ul306u16297.shtml>
- Segundo Chomsky, todos os humanos possuem a capacidade de gerar frases recursivas. Característica gravada no DNA.

Exemplo de aplicação: Teoria da Computação e Engenharia de Software

Teoria da Computação e Engenharia de Software



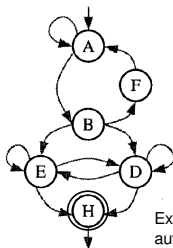
Um requisito gera um diagrama de estados (UML)



Um autômato

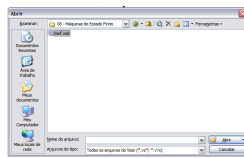
Exemplo de aplicação: Teoria da Computação e Engenharia de Software

Caso: Abrir arquivo



A: File
B: Open
D: Name
E: Select
F: Cancel
H: Open

Exemplo de seqüências reconhecidas pelo autômato:
w1: AB, BE, EH (menor palavra da linguagem)
w2: AA, AA, AA, AB, BF, AB, BE, EH



Exemplo de aplicação: Teoria da Computação e Engenharia de Software

Caso: Abrir arquivo

- Engenharia de Teste:
 - Validar entradas no MS-Word para celulares Nokia;
- Teste de software tem uma importância singular na programação para celulares;
 - Imaginem um recall para atualizar o software da agenda telefônica de todos os celulares da Motorola....
- Este simples exemplo envolve Teoria dos Grafos, Teoria da Computação e Engenharia de Software...
 - Seja multidisciplinar dentro da Computação!!!

Atualmente...

Grafos na atualidade

- Da “era Euler” até os dias atuais, a teoria dos grafos se desenvolveu rapidamente;
- Eu a considero uma teoria estável e de grande bagagem para resolução da maioria dos problemas práticos;
- Apesar da limitação computacional:
 - Seja ela de complexidade,
 - Seja ela de decidibilidade;

Grafos na atualidade

- Muitos pesquisadores trabalham **atualmente** para criação de **eficientes algoritmos** em principalmente dois cenários:
 - Ambientes dinâmicos;
 - Ambientes estocásticos;
 - Ambientes distribuídos;

Comentário...

- Site da disciplina:
 - <http://bcc.unifal-mg.edu.br/~humberto/>