UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

VINÍCIUS VIEIRA ALBANO

MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA PARA GERAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE HORÁRIOS ESCOLARES

ALFENAS/MG
2017

VINICIUS VIEIRA ALBANO

MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA PARA GERAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE HORÁRIOS ESCOLARES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Federal de Alfenas como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. Área de concentração: pesquisa operacional. Orientador: Humberto Brandão.

Alfenas/MG
2017

Vinícius Vieira Albano

Modelos de Programação Linear Inteira para Geração e Otimização de Horários Escolares

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Federal de Alfenas como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. Área de concentração: pesquisa operacional. Orientador: Prof. Dr. Humberto Brandão.

Trabalho aprovado:

Prof. Dr. Humberto Brandão
Universidade Federal de Alfenas
Orientador

Prof. Dr. Luiz Eduardo da Silva
Universidade Federal de Alfenas
Convidado 1

Prof. Dr. Flávio Barbieri Gonzaga
Universidade Federal de Alfenas
Convidado 2

Alfenas/MG
2017

Agradecimentos

Aos meus pais, Gustavo e Lílian, e meu irmão, Felipe, por todos os conselhos, broncas e investimentos que fizeram em mim pessoal e profissionalmente ao longo destes pouco mais de 23 anos de vida. Muito do que sou hoje é devido à vocês!

À todos os meus amigos, colegas e professores que contribuíram com minha formação durante o período em que estive na Universidade Federal de Alfenas. O conhecimento só é verdadeiro quando compartilhado e sou grato à tudo o que dividiram comigo!

Aos músicos alfenenses, colegas de festas e principalmente os integrantes da banda *Sound Addiction* e da República do Silício, que me acompanharam durante grande parte da graduação e me ajudaram a superar todos os momentos estressantes que passei.

Aos amigos que fiz no período de intercâmbio nos Estados Unidos e que me mostraram que mesmo com grandes distâncias, as pessoas podem ser muito próximas!

Por fim, agradeço imensamente ao meu orientador, Humberto Brandão, por todo o apoio e conhecimento que me passou durante o desenvolvimento deste projeto e também ao longo de todo o curso de Bacharelado em Ciência da Computação, mostrando que todo esforço é bem recompensado!

Resumo

O problema de geração de horários escolares (*Timetabling Problem*) demanda muito esforço e horas de trabalho para ser resolvido por funcionários de instituições de ensino, ao menos uma vez ao ano. Diversas técnicas para a automatização dele foram desenvolvidas ao longo do tempo, desde heurísticas à métodos exatos. Neste estudo é abordado o uso de programação linear inteira para a resolução e otimização mono e multiobjetivo do *School Timetabling Problem*, uma das vertentes do *Timetabling Problem*, também conhecido como modelo turma-professor.

Palavras-chave: geração de horários, otimização, programação linear inteira, escolas.

Abstract

The Timetabling Problem demands a lot of effort and work hours of the education institutions employees to be solved at least once a year. Several automation techniques have been developed over time, from heuristics to exact methods. On this study is covered the use of integer linear programming for the solution, optimization and multi-objective optimization of the School Timetabling Problem, one of the fields of the Timetabling Problem, also known as the class-teacher model.

Keywords: timetabling, optimization, integer linear programming, schools.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Aulas Geminadas na Visão do Professor 31
Figura 2 – Janelas na Visão do Professor 31
Figura 3 – Aulas Isoladas na Visão do Professor 32
Figura 4 – Aulas Duplas na Visão do Professor 32
Figura 5 – Aulas Triplas na Visão do Professor 33

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados sobre as instâncias utilizadas nos testes 48
Tabela 2 – Estatísticas de tempo de execução para cada otimização 49
Tabela 3 – Performances das otimizações individuais em comparação com a busca simples 50
Tabela 4 – Performance da otimização multiobjetivo de minimização de janelas, maximização de aulas geminadas e minimização de aulas triplas, em relação à busca simples de soluções viáveis 51
Tabela 5 – Performance da otimização multiobjetivo de proibição de aulas triplas, minimização de aulas duplas e minimização de janelas, em relação à busca simples de soluções viáveis 52
Tabela 6 – Resultados para a Instância 01 63
Tabela 7 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 01 63
Tabela 8 – Resultados para a Instância 02 64
Tabela 9 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 02 64
Tabela 10 – Resultados para a Instância 03 64
Tabela 11 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 03 65
Tabela 12 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 04 65
Tabela 13 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 04 65
Tabela 14 – Resultados para a Instância 05 66
Tabela 15 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 05 66
Tabela 16 – Resultados para a Instância 06 66
Tabela 17 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 06 67
Tabela 18 – Resultados para a Instância 07 67
Tabela 19 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 07 67
Tabela 20 – Resultados para a Instância 08 68
Tabela 21 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 08 68
Tabela 22 – Resultados para a Instância 09 68
Tabela 23 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 09 69
Tabela 24 – Resultados para a Instância 10 69
Tabela 25 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 10 69
Tabela 26 – Resultados para a Instância 11 70
Tabela 27 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 11 70
Tabela 28 – Resultados para a Instância 12 70
Tabela 29 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 12 71
Tabela 30 – Resultados para a Instância 13 71
Tabela 31 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 13 71

Tabela 32 – Resultados para a Instância 14 72
Tabela 33 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 14 72

Lista de abreviaturas e siglas

B&B	*Branch-and-Bound*
EWG-PATAT	*EURO Working Group on Automated Timetabling*
PATAT	*Practice and Theory of Automated Timetabling*
PL	Programação Linear
PLI	Programação Linear Inteira
PPI	Problema de Programação Inteira
PPL	Problema de Programação Linear
STP	*School Timetabling Problem*
XML	*Extensible Markup Language*
Min.	Minimização
Max.	Maximização
Proib.	Proibição

Lista de símbolos

α	Peso da função objetivo
$\vee$	Disjunção
$\wedge$	Conjunção

Sumário

1 INTRODUÇÃO . . . 23
1.1 Justificativa e motivação . . . 24
1.2 Problematização . . . 24
1.3 Objetivos . . . 25
1.3.1 Gerais . . . 25
1.3.2 Específicos . . . 25
1.4 Organização . . . 25

2 REVISÃO DE LITERATURA . . . 27
2.1 O problema de geração de horários . . . 27
2.1.1 Geração de horários educacionais . . . 27
2.1.2 Viabilidade, otimalidade e complexidade . . . 29
2.2 O *School Timetabling Problem* e otimizações . . . 29
2.2.1 Terminologia . . . 30
2.2.2 Definição do problema . . . 33
2.3 Métodos exatos para solução de problemas de programação linear inteira . . . 33
2.3.1 Método Simplex . . . 34
2.3.2 *Branch-and-Bound* . . . 34
2.3.3 Programação dinâmica . . . 35
2.4 Métodos heurísticos para solução do *School Timetabling Problem* . . . 35
2.5 Otimização multiobjetivo . . . 36
2.6 Trabalhos relacionados . . . 37

3 DESENVOLVIMENTO . . . 39
3.1 Modelos matemáticos para solução e otimização do *School Timetabling Problem* . . . 39
3.1.1 Definição dos parâmetros . . . 39
3.1.2 Modelo básico de geração de horários escolares . . . 39
3.1.3 Otimizações mono-objetivo . . . 40
3.1.3.1 Redução de aulas isoladas . . . 40
3.1.3.2 Maximização/minimização de aulas geminadas . . . 41
3.1.3.3 Maximização/minimização de aulas trigêmeas . . . 42
3.1.3.4 Maximização/minimização de aulas duplas . . . 42
3.1.3.5 Minimização de aulas triplas . . . 43
3.1.3.6 Proibição de aulas triplas . . . 43

3.1.3.7 Minimização de janelas . . . 44
3.1.4 Otimizações multiobjetivo . . . 44
3.2 Materiais e métodos . . . 45
3.2.1 O padrão *Decorator* de projeto de software . . . 45

4 RESULTADOS . . . 47
4.1 Tempo computacional . . . 48
4.2 Performance das otimizações . . . 50
4.2.1 Otimizações mono-objetivo . . . 50
4.2.2 Otimizações multiobjetivo . . . 50
4.2.2.1 Minimização de janelas, maximização de aulas geminadas e minimização de aulas triplas . . . 50
4.2.2.2 Proibição de aulas triplas, minimização de aulas duplas e minimização de janelas 51
4.3 Distância do ponto ótimo . . . 52

5 CONCLUSÃO . . . 55

REFERÊNCIAS . . . 57

APÊNDICES 61

APÊNDICE A – RESULTADOS DAS OTIMIZAÇÕES TESTADAS 63
A.1 Instância 01 . . . 63
A.2 Instância 02 . . . 64
A.3 Instância 03 . . . 64
A.4 Instância 04 . . . 65
A.5 Instância 05 . . . 66
A.6 Instância 06 . . . 66
A.7 Instância 07 . . . 67
A.8 Instância 08 . . . 68
A.9 Instância 09 . . . 68
A.10 Instância 10 . . . 69
A.11 Instância 11 . . . 70
A.12 Instância 12 . . . 70
A.13 Instância 13 . . . 71
A.14 Instância 14 . . . 72

1 Introdução

A vida em sociedade envolve interações entre os seres humanos, de forma que cada pessoa busca continuamente maneiras de melhorar sua qualidade de vida. A partir destas interações, as pessoas constroem sociedades, se comunicam e estabelecem regras, de forma a fazer com que as sociedades prosperem. (SMITH, 2010) considera que os acordos feitos de forma voluntária, onde as pessoas trabalham em conjunto em prol do bem estar comum, são os grandes responsáveis pela evolução da humanidade.

Uma das contribuições que cada pessoa faz em seus acordos voluntários é dedicar parte do seu tempo de vida para solucionar seus problemas. Tarefas que necessitem esforço simultâneo de mais de uma pessoa passam então a ter que ser coordenadas, de forma que o tempo gasto em comum produza o máximo de bem estar para todos os envolvidos. Consequentemente, haverá uma negociação sobre quanto tempo todos os participantes dedicarão para a resolução dos problemas e em que períodos de tempo eles trabalharão juntos para solucioná-los.

O ensino formal é uma das atividades onde as pessoas colaboram entre si, quando diversos indivíduos com diferentes objetivos compartilham uma parte de seu tempo. Desta maneira, todos buscam encontrar uma solução ótima, onde cada um gaste a menor quantidade de seus recursos e maximize seus ganhos no processo. Consequentemente, os envolvidos no ensino formal precisam coordenar suas ações e objetivos, cada um fazendo pequenas concessões para que o ganho coletivo seja maximizado, visto que não é possível alcançar a melhor solução para todos individualmente.

Para coordenar suas ações, as pessoas passaram a organizar suas tarefas através de agendas, onde assumem o compromisso de realizá-las em um dia e horário pré estabelecidos em conjunto. Uma melhor organização de suas agendas, portanto, elevará a satisfação pessoal dos envolvidos e os fará ter mais recursos disponíveis para gastar com outras atividades que possam desejar.

Instituições de ensino em geral, envolvem diversas pessoas com diferentes responsabilidades, como alunos, professores e outros funcionários. A criação de uma agenda comum, em que se possa considerar numerosas preferências e restrições pessoais, não é uma tarefa trivial e sua complexidade aumenta conforme mais indivíduos e regras forem adicionadas ao problema. A cada ano, uma quantidade considerável de horas de trabalho são despendidas tentando otimizar esta tarefa, porém, com as limitações humanas, os resultados são frequentemente insatisfatórios e não se pode atender a todos os requisitos previstos inicialmente.

Neste trabalho, propõe-se, então, uma forma de automatizar o processo de criação dos horários escolares, de forma que se possa acelerar a análise das restrições impostas por cada participante e chegar na melhor solução possível, considerando as preferências de todos os envolvidos. Para isto, foi escolhido o uso da programação linear inteira (PLI), uma forma de otimização que garante, matematicamente, o alcance da solução ótima do problema, além de conseguir provar que uma solução é inviável caso não seja possível atender a todas as regras impostas, abrindo espaço para novas negociações entre a comunidade envolvida na instituição de ensino em um prazo consideravelmente menor.

1.1 Justificativa e motivação

As tarefas de geração de horários são necessárias a toda instituição de ensino, do nível básico ao superior, no mínimo uma vez ao ano, para organizar suas atividades e garantir o funcionamento da mesma. Porém, conforme a complexidade do problema aumenta, muitos recursos são gastos com horas de trabalho e o resultado obtido frequentemente gera insatisfações, pois não atende à todas as demandas.

Apesar de ser relativamente fácil verificar se uma solução apresentada atende aos propósitos desejados, o processo para se obter sempre uma solução ótima manualmente se torna inviável de ser executado em tempo hábil conforme acrescentam-se mais aulas, professores ou turmas, dentre outras possíveis variáveis. Justifica-se então a automatização da geração de horários escolares, de forma a se permitir verificar mais restrições em menos tempo e economizar recursos humanos e financeiros das instituições.

Tendo em vista que a área de programação linear possui demanda por profissionais qualificados e a proporção dos que atuam nela é consideravelmente menor que em outras áreas da computação, obter conhecimentos sólidos neste ramo pode causar um impacto positivo na carreira de um cientista da computação.

1.2 Problematização

A geração de horários escolares é uma tarefa complexa do ponto de vista matemático, pois envolve atender a diversas restrições, com diferentes graus de importância, originadas dos interesses da administração da instituição de ensino e de outras partes envolvidas, como professores e alunos. Diversos modelos que utilizam técnicas heurísticas para resolver este problema estão disponíveis na literatura e obtém resultados satisfatórios, apesar de não garantir a otimalidade da solução.

O uso de técnicas de PLI, em contraste com métodos heurísticos, garante um resultado ótimo, ou seja, a solução encontrada é sempre a melhor possível para as variáveis e restrições inseridas no modelo. Entretanto, o tempo necessário para se obter uma solução ótima pode ser muitas vezes maior que uma solução aproximada, dependendo da complexidade do problema.

Neste trabalho, deseja-se verificar a viabilidade do uso da PLI para resolver o problema da geração de tabelas de horários escolares. Além disso, deseja-se comparar a eficiência das soluções obtidas através de diversas otimizações comumente requisitadas por escolas no Brasil.

1.3 Objetivos

1.3.1 Gerais

Este trabalho tem como objetivo melhorar o processo de geração de horários escolares no Brasil, de forma a automatizá-lo e garantir que os horários gerados atendam às diferentes demandas que possam surgir das instituições de ensino.

1.3.2 Específicos

Considerando o objetivo geral apresentado, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Reduzir gastos financeiros e de tempo das instituições de ensino ao se automatizar o processo de geração de horários escolares;
- Aumentar a satisfação pessoal dos professores, alunos e funcionários de escolas através do atendimento de demandas propostas;
- Aumentar o desempenho de aprendizado dos alunos através da geração de horários escolares melhores;
- Colaborar para o desenvolvimento de novos estudos na área de automatização da geração de horários escolares.

1.4 Organização

O presente estudo está organizado da seguinte forma:

Capítulo 2: os conceitos relacionados a modelos de programação linear são abordados neste capítulo, bem como as principais questões que envolvem o problema de geração de horários escolares.

Capítulo 3: a proposta de modelos de programação linear inteira para a solução do problema e as principais otimizações requisitadas pelas instituições de ensino.

Capítulo 4: a análise dos resultados dos testes feitos no decorrer deste projeto e comparação entre as otimizações propostas estão presentes neste capítulo.

Capítulo 5: são abordadas as principais conclusões obtidas com este estudo.

2 Revisão de Literatura

2.1 O problema de geração de horários

Conhecido na literatura como *Timetabling Problem*, o problema de geração de horários compõe quaisquer atividades relacionadas à construção de um calendário. Segundo (MICHAELIS, 2004), o significado de calendário é "tabela prefixada com as datas de determinados acontecimentos". Estes acontecimentos são normalmente encontros entre pessoas, com algum propósito em comum, em um local predeterminado. (WILLEMEN, 2002) afirma que um calendário deve satisfazer uma série de requisitos e desejos de todas as pessoas envolvidas. Além disso, o agendamento dos acontecimentos deve ser tal que ninguém possua mais que um evento ao mesmo tempo.

Dentre as principais referências em estudos sobre este tema, podemos citar a conferência internacional PATAT - *Practice and Theory of Automated Timetabling* - que foi criada em 1995 e vem acontecendo a cada dois anos, servindo como um fórum internacional para entusiastas na área de geração de horários. Essa também é a principal conferência do *EURO Working Group on Automated Timetabling* (EWG-PATAT).

2.1.1 Geração de horários educacionais

Uma das áreas específicas onde se deseja resolver problemas de geração de horários é a educacional, conhecida como *Educational Timetabling*. Segundo (SCHAERF, 1999), a geração de horários educacionais envolve agendar uma sequência de aulas entre professores e alunos em um determinado período de tempo prefixado (geralmente uma semana), satisfazendo um conjunto de restrições de vários tipos.

Diferentes abordagens para esta área tem sido realizadas na literatura, sendo adaptadas conforme a realidade da instituição de ensino e as restrições e otimizações desejadas. Entretanto, os autores frequentemente dividem *Educational Timetabling* em três principais subcategorias

- *University Course Timetabling*: O agendamento semanal para todas as aulas de um conjunto de disciplinas universitárias, minimizando a sobreposição de aulas de disciplinas que possuam estudantes em comum. (KRISTIANSEN; STIDSEN, 2013) acrescenta que a grande estrutura e tamanho das universidades torna a resolução do problema tão complexa que envolve diversos especialistas de diversos departamentos. Além disso, a complexidade de criar os horários novamente se torna tão grande que é comum reutilizar os calendários de anos passados.

Em seu estudo, (KRISTIANSEN; STIDSEN, 2013) também explicita que podem haver dois tipos diferentes de problemas envolvidos: *Curriculum-based University Course Timetabling* e *Enrollment-based University Course Timetabling*. No primeiro caso, busca-se resolver problemas de base curricular, onde as aulas oferecidas são estruturadas de acordo com restrições criadas por um departamento específico e estão normalmente relacionadas à um curso da universidade. O segundo problema envolve o agendamento de aulas para disciplinas independentes que os estudantes se matriculam previamente e, então, deseja-se obter um calendário para que todos possam frequentá-las. Além disso, alega que as duas abordagens não são mutuamente exclusivas e podem ser usadas em conjunto, como, por exemplo, utilizar o agendamento curricular no início do curso e o por matrículas ao final, de forma a maximizar as possibilidades de especialização para o estudante;

- *School Timetabling*: É conhecido como o modelo turma/professor. Segundo (WILLEMEN, 2002), os eventos são *aulas* em uma disciplina, lecionadas por um *professor*, para uma *turma*, em uma *sala de aula* e a resolução do problema envolve a alocação destes recursos. A principal diferença para o modelo universitário, como explica (KRISTIANSEN; STIDSEN, 2013), é que nas escolas há o agrupamento de estudantes em turmas, enquanto nas universidades normalmente os estudantes realizam matrículas em suas disciplinas individualmente. Além disso, há diferença na carga de trabalho dos professores, onde nas escolas eles lecionam em tempo integral, enquanto nas universidades as aulas são apenas parte do trabalho;

- *Examination Timetabling*: Requere o agendamento de exames para um conjunto de disciplinas em uma determinada quantidade de tempo. Conforme alega (SCHAERF, 1999), esta modalidade é muito similar ao *University Course Timetabling*, porém existem algumas diferenças amplamente aceitadas:
  - Há apenas um exame por disciplina;
  - Normalmente é possível aceitar que estudantes faltem às aulas devido a conflito de horários, porém não se pode aceitar que faltem aos exames;
  - Existem diferentes tipos de restrições, *e.g.* no máximo um exame por dia por estudante e não ter muitos exames consecutivos para cada estudante;
  - O número de períodos de tempo pode ser variável, em contraste com *University Course Timetabling*, onde é fixo;
  - Pode haver mais de um exame diferente por sala de aula.

Além destas três divisões, (KRISTIANSEN; STIDSEN, 2013) acrescenta uma quarta possibilidade que não está relacionada à alocação de eventos (aulas), mas com a separação dos estudantes em diferentes seções e é conhecida como *Student Sectioning*.

Uma disciplina pode ser dividida entre diferentes seções/turmas, *i.e.* cópias da mesma disciplina, cada uma com seu próprio horário, sala e professor. Este problema envolve alocar estudantes para seções de disciplinas enquanto se respeitam as requisições individuais dos estudantes.

Soluções manuais para o *Educational Timetabling*, conforme relata (SOUSA; MORETTI; PODESTÁ, 2008), são extremamente difíceis e podem levar de dias até semanas para serem concluídas, além de frequentemente gerarem resultados insatisfatórios em relação a vários requisitos. Ainda conforme (SOUSA; MORETTI; PODESTÁ, 2008), dependendo do número de professores e grupos de estudantes envolvidos, o problema se torna inviável de se resolver manualmente e justifica-se, portanto, toda a atenção dada à sua automatização.

2.1.2 Viabilidade, otimalidade e complexidade

Quando a solução de um *Timetabling Problem* envolve encontrar qualquer combinação variáveis que satisfaça todas as restrições impostas, classifica-se o problema como um *problema de busca*, conforme explica (SCHAERF, 1999). Em outros casos, quando se deseja encontrar a melhor solução possível, ou seja, deve-se satisfazer todas as restrições invioláveis e maximizar ou minimizar uma função objetivo que possui restrições flexíveis, define-se como um *problema de otimização*.

Ainda segundo (SCHAERF, 1999), é classificado como *problema básico*, a tarefa de encontrar se existe uma solução, no caso de um problema de busca, ou encontrar se existe uma solução com um determinado valor de um função objetivo, no caso de um problema de otimização. Quando se trata da complexidade do problema, então, refere-se à complexidade de resolver o *problema básico*.

As instâncias do *Timetabling Problem*, assim como vários de seus sub-problemas, possuem complexidade NP-Completo, conforme afirma (WILLEMEN, 2002) em seu estudo. Isto significa que algoritmos exatos para otimização demandam muito tempo e esforço computacional. Por esta razão, muitas técnicas heurísticas vêm sendo utilizadas ao longo do tempo, com o objetivo de encontrar uma solução não ótima, mas adequada, em tempo viável.

2.2 O *School Timetabling Problem* e otimizações

Este trabalho aborda a solução e otimização do *School Timetabling Problem* (STP), que possui alta aplicabilidade devido ao grande número de instituições de ensino primário no Brasil e no mundo. Conforme relata (PILLAY, 2014), apesar de haver diversos estudos no STP, ele não foi tão bem explorado quanto as outras variantes do *Educational Timetabling*. Este menor avanço, em comparação às demais áreas, se deve à estudos isolados, onde se aplicam diversas metodologias para resolver o problema de uma única escola, dificultando a comparação entre diferentes estudos, ainda segundo (PILLAY, 2014). Justifica-se, então, a escolha desta modalidade de problema, de forma a ampliar os estudos na área e realizar comparações efetivas entre casos divergentes.

Em relação ao problema de otimização, este estudo tem como objetivo apresentar e comparar a eficiência de algumas otimizações referentes ao STP que são comumente requisitadas por escolas no Brasil:

- Minimização de Aulas Isoladas;
- Maximização/Minimização de Aulas Geminadas;
- Maximização/Minimização de Aulas Trigêmeas;
- Maximização/Minimização de Aulas Duplas;
- Minimização de Aulas Triplas;
- Proibição de Aulas Triplas;
- Minimização de Janelas;

As otimizações apresentadas podem ser utilizadas individualmente ou em conjunto, através de uma otimização multiobjetivo, *e.g.* minimização de aulas triplas e maximização de aulas geminadas. Além disso é possível atribuir diferentes importâncias para cada uma, conforme as preferências da instituição de ensino.

2.2.1 Terminologia

Nesta seção são abordados os principais termos utilizados ao longo deste trabalho. Uma *turma* se refere à um grupo de estudantes que receberá aulas de uma disciplina específica.

O termo *ano* se refere ao nível de escolaridade dos alunos, onde cada ano pode ter uma ou mais turmas. Neste sentido, o primeiro ano se refere ao ano de início dos estudos no ensino fundamental, enquanto o nono ano se refere ao último.

Uma *disciplina* é referente ao conteúdo que será lecionado para uma turma, *e.g.* Português, Matemática ou Ciências. A base curricular que compõe cada disciplina no Brasil é determinada pelo Ministério da Educação.

Uma *aula* é o período de tempo em que um professor leciona uma disciplina para uma turma específica. Pode-se definir também como o evento que reune estas três partes (professor, disciplina e turma).

No contexto deste trabalho, *hora* se refere à hora-aula, ou o tempo mínimo em que uma aula ocorre nas instituições de ensino e que correspondem normalmente a 1 hora ou 50 minutos em tempo cronológico.

Algumas instituições de ensino requerem que existam *aulas geminadas* em suas tabelas de horários, *i.e.* aulas da mesma disciplina sendo lecionadas para a mesma turma em dois ou mais horários consecutivos. Neste trabalho são consideradas como aulas geminadas a união de duas aulas consecutivas e *aulas trigêmeas* a união de três aulas consecutivas. A Figura 1 ilustra a presença de aulas geminadas em uma tabela de horários fictícia gerada para um professor qualquer, que lecione aulas para 5 turmas diferentes, em 5 dias diferentes e 5 horários diferentes.

	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5
Aula 1	Turma 1	Turma 2	Turma 5	Turma 3	Turma 1
Aula 2	Turma 1		Turma 4	Turma 3	Turma 2
Aula 3			Turma 5		Turma 4
Aula 4	Turma 2		Turma 4		
Aula 5	Turma 3		Turma 5	Turma 3	

Figura 1 – Aulas Geminadas na Visão do Professor

Fonte: desenvolvido pelo autor

São denominadas *janelas*, lacunas de tempo onde um professor não leciona nenhuma aula, mas lecionou anteriormente e voltará a lecionar posteriormente. Janelas são ruins para as instituições de ensino, pois os professores permanecerão na instituição, sendo pagos por isso, sem produzir nada. Tabelas de horários que não possuem janelas são denominadas *compactas*. A Figura 2 ilustra a presença de janelas numa tabela de horários fictícia gerada para um professor qualquer, explicitada anteriormente.

	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5
Aula 1	Turma 1	Turma 2	Turma 5	Turma 3	Turma 1
Aula 2	Turma 1		Turma 4	Turma 3	Turma 2
Aula 3			Turma 5		Turma 4
Aula 4	Turma 2		Turma 4		
Aula 5	Turma 3		Turma 5	Turma 3	

Figura 2 – Janelas na Visão do Professor

Fonte: desenvolvido pelo autor

Consideram-se como *aulas isoladas*, aquelas onde um professor só lecionará por uma hora na instituição de ensino, em um dia específico. Aulas isoladas são prejudiciais ao professor, que gasta tempo de deslocamento e recursos financeiros para ir até a escola, por onde permanecerá por pouco tempo. Ainda na mesma tabela fictícia de horários, a Figura 3 representa a existência de aulas isoladas.

	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5
Aula 1	Turma 1	Turma 2	Turma 5	Turma 3	Turma 1
Aula 2	Turma 1		Turma 4	Turma 3	Turma 2
Aula 3			Turma 5		Turma 4
Aula 4	Turma 2		Turma 4		
Aula 5	Turma 3		Turma 5	Turma 3	

Figura 3 – Aulas Isoladas na Visão do Professor

Fonte: desenvolvido pelo autor

Algumas escolas também apresentam exigências quanto a *aulas duplas*. Definem-se como aulas duplas, eventos quando um professor leciona duas aulas para a mesma turma em um mesmo dia, independente do horário. A Figura 4 ilustra a ocorrência deste tipo de evento.

	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5
Aula 1	Turma 1	Turma 2	Turma 5	Turma 3	Turma 1
Aula 2	Turma 1		Turma 4	Turma 3	Turma 2
Aula 3			Turma 5		Turma 4
Aula 4	Turma 2		Turma 4		
Aula 5	Turma 3		Turma 5	Turma 3	

Figura 4 – Aulas Duplas na Visão do Professor

Fonte: desenvolvido pelo autor

Também podem haver demandas em relação às *aulas triplas*, que seguem o mesmo padrão das aulas duplas, porém com três aulas no mesmo dia. A Figura 5 apresenta este evento na visão do professor.

Por fim, definem-se como *restrições fortes* aquelas que precisam necessariamente ser cumpridas durante o processo de geração das tabelas de horários. *Restrições fracas* são utilizadas para otimizações, onde não necessariamente precisam alcançar um valor específico, mas deseja-se minimizar ou maximizar um determinado recurso ou característica da tabela de horários.

	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5
Aula 1	Turma 1	Turma 2	Turma 5	Turma 3	Turma 1
Aula 2	Turma 1		Turma 4	Turma 3	Turma 2
Aula 3			Turma 5		Turma 4
Aula 4	Turma 2		Turma 4		
Aula 5	Turma 3		Turma 5	Turma 3	

Figura 5 – Aulas Triplas na Visão do Professor

Fonte: desenvolvido pelo autor

2.2.2 Definição do problema

Cada STP pode ser definido de acordo com a quantidade de recursos a serem alocados nas tabelas de horários, *i.e* a quantidade de professores disponíveis, quantas turmas existem e quantas aulas cada professor lecionará para cada turma, além de um conjunto de restrições. Neste trabalho, não é abordado o agendamento de salas de aula, visto que no Brasil, geralmente, as salas possuem tamanho e capacidade padrão, apesar de haver estudos sobre este tema disponíveis na literatura (ver (ABRAMSON, 1991) para mais informações sobre a alocação de salas de aula).

A solução do STP envolve alocar turmas e professores em dias e horários específicos, de forma que as restrições fortes e fracas sejam cumpridas (PILLAY, 2014). Além disso, cada país possui suas próprias características e regulamentações específicas sobre o sistema educacional, devendo o modelo proposto atender à diferentes restrições, conforme as necessidades impostas (POST et al., 2012).

2.3 Métodos exatos para solução de problemas de programação linear inteira

Problemas de otimização podem ser divididos naturalmente em duas categorias: aqueles que possuem variáveis contínuas e aqueles que possuem variáveis discretas, que chamamos de *otimização combinatória*. De acordo com (PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998), nos problemas contínuos geralmente busca-se um conjunto de números reais, ou mesmo uma função, enquanto nos problemas combinatórios investigam-se conjuntos finitos (geralmente um número inteiro, conjunto, permutação ou grafo). Ainda segundo (PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998), estes dois diferentes tipos de problemas possuem suas próprias características e métodos próprios para resolução, que se tornaram um pouco divergentes.

Neste trabalho é abordado o *School Timetabling Problem*, que é um problema de otimização combinatória, pois envolve encontrar um conjunto de variáveis discretas, *i.e* quais professores e turmas serão alocados em conjunto por um período de tempo para uma aula. Apesar do STP ser um problema de otimização combinatória, neste trabalho ele é modelado como um problema de PLI. Por consequência, são descritos à seguir os principais métodos exatos para resolução de problemas de programação linear inteira.

2.3.1 Método Simplex

O primeiro Problema de Programação Linear (PPL) foi introduzido por George B. Dantzig em 1947, enquanto trabalhava como um consultor matemático para a Força Aérea dos Estados Unidos, conforme explica (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2005), apesar do matemático soviético L. V. Kantorovich haver formulado e resolvido um problema deste tipo em 1939, mas que ficou desconhecido até 1959. Este tipo de técnica envolve a otimização (minimização ou maximização) de uma função linear, enquanto se satisfaz um conjunto de restrições lineares de igualdade ou desigualdade (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2005).

Também em 1947, Dantzig publicou o Método *Simplex* para resolução de programas lineares, que se tornou extensivamente utilizado no ambiente militar, industrial, governamental e campos de planejamento urbano, dentre outros. Segundo (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2005), o método simplex possui uma grande aceitação por duas razões: a sua capacidade de modelar importantes e complexos problemas de decisões de gerenciamento, e sua capacidade de produzir soluções em uma quantidade razoável de tempo.

A primeira aplicação relevante do método simplex foi feita por J. Laderman, que resolveu um programa linear de planejamento de dietas com nove restrições de igualdade em 27 variáveis não-negativas, no *National Bureau of Standards*, conforme explica (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2005). Foram utilizadas calculadoras de mesa e o equivalente a 120 dias de trabalho para a resolução do problema.

O simplex é um algoritmo que utiliza técnicas de Álgebra Linear para determinar a solução ótima de um PPL. Segundo (GOLDBARG; LUNA, 2000), o algoritmo parte de uma solução viável do sistema e identifica novas soluções, iterativamente, que sejam de valor igual ou melhor que a atual. Conforme explica (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2005), o método simplex mostra que se existe uma solução ótima, então também existe um ponto ótimo extremo. O algoritmo melhora as soluções, iterativamente, até alcançar o ponto ótimo ou concluir que o ponto ótimo não tem uma limitação.

2.3.2 *Branch-and-Bound*

O algoritmo *Branch-and-Bound* (B&B) é baseado na ideia de se enumerar implícita ou explicitamente todos os pontos viáveis de um problema de otimização combinatória, utilizado em problemas de PLI. Sua nomenclatura se deve a efetuar partições no espaço das soluções (*branch*) e provar a otimalidade durante a execução, sem uma busca exaustiva (*bound*) (PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998; GOLDBARG; LUNA, 2000).

Por definição, a solução de um PPL é sempre maior ou igual à solução de um Problema de Programação Inteira (PPI) e o PPI pode ser obtido do PPL através da desconsideração de restrições de integralidade, uma técnica conhecida como relaxação linear do PPI. O princípio do algoritmo B&B é que, se a solução do PPL relaxado corresponde à uma solução do PPI, então esta é a solução ótima do PPI. A ideia então é relaxar o problema de programação inteira e dividi-lo em subproblemas até que a melhor solução seja encontrada (PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998; GOLDBARG; LUNA, 2000).

2.3.3 Programação dinâmica

A Programação Dinâmica é uma técnica parecida com o B&B, no sentido de realizar enumerações inteligentes de todos os pontos viáveis de um problema, porém de outra forma. A técnica utilizada é a de trabalhar no sentido contrário, da última decisão para as primeiras (PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998).

Nesta técnica, utiliza-se um conceito de que, para chegar numa solução ótima, são necessárias diversas soluções ótimas de um subproblema, realizadas em sequência. Desta maneira, busca-se dividir o problema original em diversas fases onde se deve tomar decisões e encontrar uma relaxação de recorrência que possa levar o problema do estágio atual para o estágio anterior. Por consequência, ao se encontrar a solução ótima de um estágio anterior, encontrar a solução ótima do estágio atual é uma tarefa mais simplificada.

2.4 Métodos heurísticos para solução do *School Timetabling Problem*

Neste estudo são abordados métodos exatos para a solução do STP, pois garantem a otimalidade da solução. Entretanto, alguns método heurísticos são comumente abordados na literatura, pela capacidade de gerar boas soluções em um tempo reduzido em relação aos métodos exatos, embora não garantam a otimalidade da solução.

- Algoritmos genéticos: Concebido inicialmente por (HOLLAND JOHN;LANGTON, 1992), em seu livro *Adaptation in Natural and Artificial Systems* como uma forma de estudar o comportamento adaptativo, o algoritmo genético vem sido amplamente considerado como um método de otimização de função (EIBEN; SMITH, 2007). O algoritmo genético clássico possui uma representação binária, seleção proporcional à aptidão, uma pequena probabilidade de mutação e ênfase na recombinação geneticamente inspirada como forma de gerar um novas soluções candidatas (EIBEN; SMITH, 2007).

- *Simulated Annealing*: O *Simulated Annealing*, ou arrefecimento simulado, é um algoritmo baseado no processo físico de arrefecimento, que envolve a aglomeração de partículas em um sistema físico enquanto ele é resfriado (ABRAMSON; AMOORTHY; DANG, 1999). Este algoritmo possui uma aplicabilidade geral, pois realiza otimizações sem conhecimento prévio da estrutura do problema ou de qualquer estratégia particular de solução (ABRAMSON; AMOORTHY; DANG, 1999).

- Busca Tabu: É um procedimento geral de busca, com o objetivo de encontrar o mínimo global de uma função definida em um conjunto viável X. Para cada solução s em X, se define a vizinhança $N(s)$ que consiste de todas as soluções viáveis que podem ser obtidas através de se aplicar em s uma modificação simples m (COSTA, 1994).

2.5 Otimização multiobjetivo

Um problema de otimização multiobjetivo pode ser definido como um caso quando se deseja realizar diversas otimizações simultaneamente. No caso do STP, uma otimização multiobjetivo pode ser requisitada, por exemplo, ao ser necessário maximizar a quantidade de aulas geminadas e minimizar a quantidade de janelas ao mesmo tempo.

Conforme relata (AZUMA, 2011), diferentes otimizações podem ser conflitantes entre si e isto faz com que o conceito de otimalidade utilizado em otimizações mono-objetivo não possa ser aplicado. AZUMA ainda explica que um conjunto de soluções é denominado Pareto-ótimo (devido à estudo efetuado por Vilfredo Pareto em 1896), se para cada solução existente não há uma nova solução possível que aumente a qualidade de um dos critérios, sem reduzir simultaneamente a qualidade de outros critérios.

Dentre as principais técnicas para se resolver problemas de otimização multiobjetivo estão, ainda segundo (AZUMA, 2011):

- Soma Ponderada dos Objetivos: Envolve a transformação do problema em uma otimização mono-objetivo através da soma das diversas funções objetivo multiplicadas por pesos, que são definidos como parâmetro. Os pesos devem ser escolhidos com cuidado, pois afetarão a relevância de cada otimização dentro do problema.

- Método de Restrições ϵ: Um dos objetivos é escolhido para ser minimizado, em caso de problema de minimização, e os demais objetivos $f_m(x)$ são transformados em restrições, de forma que $f_m(x) \leq \epsilon_m$. Para isso, é preciso que cada ϵ_m escolhido esteja em uma região viável para cada objetivo.

- Programação por Metas: Tenta-se atingir objetivos que cumpram à uma meta determinada previamente. Caso a meta não possa ser alcançada para todas as otimizações escolhidas, minimiza-se o desvio de cada uma delas, de forma a encontrar a melhor solução viável para todas as otimizações.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi escolhido o método de Soma Ponderada dos Objetivos, que pode ser usado facilmente em conjunto com as técnicas de PLI utilizadas para solução do STP.

2.6 Trabalhos relacionados

(WERRA, 1985) lista vários problemas relacionados ao *Timetabling Problem* de maneira formal, além das principais abordagens até a data para resolvê-los. Além disso, (WERRA, 1985) é responsável por uma das formalizações mais simples do *School Timetabling Problem*, que envolve designar aulas para períodos de tempo, de forma que nenhum professor ou turma esteja envolvido em mais de uma aula ao mesmo tempo; além de diversas otimizações deste, como realizar preagendamento de aulas específicas, utilizar a indisponibilidade de professores ou turmas em determinados períodos, dentre outras.

Diversas otimizações foram realizadas ao longo do tempo no *School Timetabling Problem*, como a possibilidade de haver turmas simultâneas na mesma aula (como em casos de aulas de Educação Física) (YOSHIKAWA et al., 1996); a possibilidade de um único professor lecionar duas ou mais disciplinas diferentes (COOPER; KINGSTON, 1993). Mais recentemente, no Brasil, (CISCON, 2006) desenvolveu um trabalho focado em reduzir janelas e aulas isoladas.

Tentando resolver o problema de falta de *benchmarks* para o STP, (POST et al., 2012) desenvolveu um método de especificação utilizando XML (*eXtensible Markup Language*), de forma a padronizar a descrição dos problemas e permitir a cooperação internacional para desenvolver novas técnicas que possam resolvê-los.

(BUCCO et al., 2017) desenvolveu um modelo de programação linear focado no *University Courses Timetabling*.

Um levantamento sobre as principais características do STP e abordagens para resolvê-lo foi realizado por (PILLAY, 2014). Além disso, (SCHAERF, 1999) fez um levantamento envolvendo o *Educational Timetabling* num modo geral, explicitando detalhes sobre suas divisões e formulações matemáticas dos principais modelos de cada uma.

3 Desenvolvimento

3.1 Modelos matemáticos para solução e otimização do *School Timetabling Problem*

3.1.1 Definição dos parâmetros

Todo conjunto de horários escolares possui alguns parâmetros básicos que são comuns à todas as instituições de ensino:

- $D' = \{1, \ldots, D\}$ é o conjunto de dias em que haverão aulas na instituição, onde $D \in \mathbb{Z}^+$ é a quantidade de dias disponíveis;
- $H' = \{1, \ldots, H\}$ é o conjunto de horas por dia em que haverão aulas na instituição, onde $H \in \mathbb{Z}^+$, é a quantidade de horas disponíveis;
- $T' = \{1, \ldots, T\}$ é o conjunto de turmas que a instituição possui, onde $T \in \mathbb{Z}^+$, é a quantidade de turmas disponíveis;
- $P' = \{1, \ldots, P\}$ é conjunto de professores que lecionam na instituição, onde $P \in \mathbb{Z}^+$, a quantidade de professores disponíveis;
- $a_{tp} \in \mathbb{Z}^+$ é a matriz com a quantidade de aulas que cada professor p leciona para cada turma t, onde $p \in P'$, $t \in T'$;
- $i_{dhp} \in \{0, 1\}$ é uma matriz de indisponibilidade de cada professor p lecionar em cada dia d e horário h, possuindo valor 1, caso haja indisponibilidade, ou valor 0, caso contrário, onde $p \in P'$, $d \in D'$ e $h \in H'$.

Dados os parâmetros acima, será definida a variável de decisão $X_{dhtp} \in \{0, 1\}$, recebe valor 1, caso um professor p lecione para uma turma t, em um dia d e horário h, ou valor 0, caso contrário, onde $p \in P'$, $t \in T'$, $d \in D'$ e $h \in H'$.

3.1.2 Modelo básico de geração de horários escolares

A função objetivo do modelo, f_1 pode ser descrita como a maximização do número de aulas dadas na instituição, como está explícita na Equação 3.1:

$$max f_1 = \sum_{d=1}^{D} \sum_{h=1}^{H} \sum_{t=1}^{T} \sum_{p=1}^{P} X_{dhtp} \tag{3.1}$$

sujeito a:

$$\sum_{p=1}^{P} X_{dhtp} = 1 \qquad \forall d \in D', h \in H', t \in T' \tag{3.2}$$

$$\sum_{t=1}^{T} X_{dhtp} \leq 1 \qquad \forall d \in D', h \in H', p \in P' \tag{3.3}$$

$$\sum_{d=1}^{D} \sum_{h=1}^{H} X_{dhtp} = a_{tp} \qquad \forall t \in T', p \in P', \tag{3.4}$$

$$X_{dhtp} + u_{dhp} \leq 1 \qquad \forall d \in D', h \in H', t \in T', p \in P' \tag{3.5}$$

$$X_{dhtp} \in \{0, 1\} \qquad \forall d \in D', h \in H', t \in T', p \in P' \tag{3.6}$$

O conjunto de restrições definido na Equação 3.2 faz com que todas as turmas a terem exatamente um professor lecionando a cada dia, em cada horário.
O conjunto de restrições definido na Equação 3.3 garante que cada professor lecione exatamente uma ou zero aulas para cada turma, a cada dia, em cada horário.
O conjunto de restrições definido na Equação 3.4 assegura que cada professor irá lecionar todas as aulas que lhe foram requisitadas para cada turma.
O conjunto de restrições definido na Equação 3.5 certifica que uma aula não será associada a um professor caso ele esteja indisponível em um dia e horário específicos.
O conjunto de restrições definido na Equação 3.6 determina que os valores possíveis para a variável de decisão sejam sempre 1 (em caso de haver aula associada à um professor para uma turma, em um dia e horário específicos) ou 0 (caso contrário).

3.1.3 Otimizações mono-objetivo

O simples modelo de busca introduzido na subseção 3.1.2 é capaz de gerar soluções viáveis para o STP. Porém existem incentivos para que a instituição de ensino não apenas encontre uma solução viável para seu cronograma de aulas, mas uma solução ótima que atenda às demandas vindas de diversos fatores internos e externos, sejam eles econômicos ou não. Nesta seção, são abordadas algumas otimizações que podem ser utilizadas para melhorar a eficiência do modelo apresentado anteriormente.

Para todos os modelos descritos à seguir, considera-se que as restrições descritas nas Equações 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 são aplicadas, de forma a garantir o funcionamento do problema básico.

3.1.3.1 Redução de aulas isoladas

Uma das possíveis otimizações é a redução de aulas isoladas, *i.e.* quando um professor é associado para lecionar uma única aula em um dia específico. A minimização de aulas isoladas atende aos interesses dos professores, pois lhes permite economizar recursos como tempo de deslocamento até a instituição, onde ficaria por apenas uma aula no dia. Além disso, lhe permite lecionar em outras instituições ou realizar outras atividades caso assim deseje. Esta otimização pode ser feita através da utilização de uma segunda variável de decisão, $ISOLADA_{dp} \in \{0, 1\}$, que indica quando um professor p está associado a uma única aula em um dia d, independente da turma ou horário. Assim, será criada uma nova função objetivo, f_2, descrita na Equação 3.7.

$$min f_2 = \sum_{d=1}^{D} \sum_{p=1}^{P} ISOLADA_{dp} \tag{3.7}$$

sujeito a:

$$ISOLADA_{dp} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{h=1}^{H} \sum_{t=1}^{T} X_{dhtp} = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \forall d \in D', p \in P' \tag{3.8}$$

Isto é, caso a somatória de aulas para todas as turmas, em todos os horários seja igual a 1, dados um dia e professor específicos, a variável $ISOLADA_{dp}$ terá valor igual a 1, senão, terá valor igual a 0. Assim, somando-se os valores de $ISOLADA_{dp}$ para todos os dias e professores existentes, temos a quantidade total de aulas isoladas geradas pelo modelo. A função objetivo f_2, então, minimiza este somatório.

3.1.3.2 Maximização/minimização de aulas geminadas

Aulas geminadas podem ser definidas como o caso onde um professor leciona para a mesma turma durante dois horários consecutivos no mesmo dia. Esta otimização pode ser requisitada pelas instituições de ensino para otimizar o tempo útil das aulas, *i.e.* reduzir o tempo gasto entre a troca de turmas e controle de presença dos alunos, dentre outros. A verificação de aulas geminadas pode ser resolvida através da programação linear inteira utilizando uma nova variável de decisão $GEMINADA_{dhtp} \in \{0, 1\}$, que indica se a aula associada a um professor p para uma turma t, em um dia d e horário h é uma aula geminada, assumindo valor 1, ou não, assumindo valor 0. Desta maneira, a função objetivo que maximiza a quantidade de aulas geminadas f_3, pode ser descrita como na Equação 3.9

$$.min/max f_3 = \sum_{d=1}^{D} \sum_{h=1}^{H} \sum_{t=1}^{T} \sum_{p=1}^{P} GEMINADA_{dhtp} \tag{3.9}$$

sujeito a:

$$GEMINADA_{dhtp} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_{dhtp} = 1 \wedge X_{d,h+1,t,p} = 1 \\ 0, & \text{se } X_{dhtp} = 0 \vee X_{d,h+1,t,p} = 0 \end{cases} \qquad \forall d \in D', h \in \{1, \ldots, H-1\}, t \in T', p \in P' \tag{3.10}$$

As restriçõem na Equação 3.10 definem que, para todos os professores, turmas, dias e horários, se duas aulas consecutivas X_{dhtp} e $X_{d,h+1,t,p}$ tiverem valor igual a 1, a aula X_{dhtp} é uma aula geminada. Caso X_{dhtp} ou $X_{d,h+1,t,p}$ tiverem valor igual a 0, a aula X_{dhtp} não é geminada.

3.1.3.3 Maximização/minimização de aulas trigêmeas

A otimização de aulas trigêmeas ocorre de forma semelhante ao apresentado na subseção 3.1.3.2, porém acrescenta-se uma aula na sequência. Esta otimização é normalmente utilizada como minimização e visa melhorar o desempenho dos estudantes, pois considera-se que três aulas da mesma disciplina em sequência podem não ser vantajosas para o aprendizado.

Cria-se então uma variável de decisão $TRIGEMEA_{dhcp} \in \{0, 1\}$, que indica se uma aula associada à um professor p, para uma turma t, em um dia d e horário h, é trigêmea. A variável recebe então valor 1, em caso positivo, ou valor 0, em caso negativo. A função objetivo f_5 pode ser verificada a seguir, na Equação 3.11.

$$min/max f_5 = \sum_{d=1}^{D} \sum_{h=1}^{H} \sum_{t=1}^{T} \sum_{p=1}^{P} TRIGEMEA_{dhtp} \tag{3.11}$$

sujeito a:

$$TRIGEMEA_{dhtp} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_{dhtp} = 1 \wedge X_{d,h+1,t,p} = 1 \wedge X_{dh+2tp} = 1 \\ 0, & \text{se} X_{dhtp} = 0 \vee X_{d,h+1,t,p} = 0 \vee X_{d,h+2,t,p} = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$
$$\forall d \in D', h \in \{1, \ldots, H-2\}, t \in T', p \in P'$$

Como descrito no conjunto de restrições definido na Equação 3.12, caso X_{dhtp}, $X_{d,h+1,t,p}$ e $X_{d,h+2,t,p}$ possuam ambos valor igual a 1, $TRIGEMEA_{dhtp}$ recebe valor 1. Caso X_{dhtp}, $X_{d,h+1,t,p}$ ou $X_{d,h+2,t,p}$ possuam valor igual a 0, $TRIGEMEA_{dhtp}$ recebe valor 0.

3.1.3.4 Maximização/minimização de aulas duplas

A minimização de aulas duplas é outra possibilidade de otimização, onde se quer que um determinado professor só lecione uma ou nenhuma para uma turma específica, em um determinado dia. Porém é permitido que lecione duas aulas ou mais, caso seja impossível reduzir este número.

Para esta otimização será criada uma variável de decisão $DUPLA_{dtp} \in \{0, 1\}$, que recebe valor 1 se um professor p leciona duas ou mais aulas no mesmo dia d, para uma turma t. Caso ele lecione uma ou zero aulas para esta turma, neste mesmo dia, a variável recebe valor 0. A função objetivo f_6 responsável por minimizar as aulas duplas é descrita na Equação 3.13:

$$max/min f_6 = \sum_{d=1}^{D} \sum_{t=1}^{T} \sum_{p=1}^{P} DUPLA_{dtp} \tag{3.13}$$

sujeito a:

$$DUPLA_{dtp} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{h=1}^{H} X_{dhtp} \geq 2 \\ 0, & \text{se } \sum_{h=1}^{H} X_{dhtp} \leq 1 \end{cases} \quad (3.14)$$
$$\forall d \in D', t \in T', p \in P'$$

O conjunto de restrições definido na Equação 3.14 garante que, se o somatório de todas aulas de um professor, em um dia específico, para uma turma específica, for maior ou igual a 2, $DUPLA_{dtp}$ recebe valor 1. Caso este somatório seja menor ou igual a 1, a variável de decisão recebe valor 0.

3.1.3.5 Minimização de aulas triplas

Outra requisição comumente solicitada pelas escolas é a minimização de aulas triplas. Esta demanda pode ser descrita matematicamente utilizando uma variável de decisão $TRIPLA_{dtp} \in \{0, 1\}$, que recebe valor 1 caso um professor p lecione três ou mais aulas no mesmo dia d, para uma turma t, independente da hora. A variável recebe valor 0 caso essa condição não seja satisfeita. A minimização da função objetivo f_6, descrita na Equação 3.15, cumpre os objetivos desta otimização.

$$max/min f_7 = \sum_{d=1}^{D} \sum_{t=1}^{T} \sum_{p=1}^{P} TRIPLA_{dtp} \quad (3.15)$$

sujeito a:

$$TRIPLA_{dtp} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{h=1}^{H} X_{dhtp} \geq 3 \\ 0, & \text{se } \sum_{h=1}^{H} X_{dhtp} \leq 2 \end{cases} \quad (3.16)$$
$$\forall d \in D', t \in T', p \in P'$$

O conjunto de restrições definido na Equação 3.16 certificam que, se o somatório de todas as aulas de um professor, em um dia específico, para uma turma específica, for maior ou igual a 3, $TRIPLA_{dtp}$ recebe valor 1. Se esta soma for menor ou igual a 2, a variável tem valor 0.

3.1.3.6 Proibição de aulas triplas

Diferentemente das restrições apresentadas anteriormente, a proibição de aulas triplas é uma restrição forte, ou seja, deve obrigatoriamente ser cumprida. Caso não seja possível gerar um horário sem aulas triplas, retorna-se para o usuário que o problema é insolúvel. Para atender à esta demanda, adiciona-se uma nova restrição ao modelo de programação linear, conforme descrito na Equação 3.17.

$$\sum_{h=0}^{H} X_{dhcp} \leq 2 \qquad \forall d \in D', t \in T', p \in P' \tag{3.17}$$

O conjunto de restrições definido na Equação 3.17 garante que a somatória de aulas de todos os professores, para todos os dias e turmas, seja sempre menor ou igual a 2. Desta maneira, ficam proibidas que existam aulas triplas nos resultados, além da existência de 4, 5, ou mais aulas, por consequência, para toda combinação existente de professores, turmas e dias.

3.1.3.7 Minimização de janelas

São definidas como janelas, horários onde um professor não leciona para nenhuma turma na instituição, em um determinado dia, mas lecionou uma ou mais aulas anteriormente e lecionará uma ou mais aulas posteriormente. Janelas são consideradas ruins para a instituição de ensino, pois ela terá que pagar pelo tempo em que o professor permanece na instituição sem lecionar nenhuma aula.

A verificação de janelas pode ser feita através de uma variável de decisão $JANELA_{dhp}$ $\in \{0, 1\}$, que indica se existe uma janela logo após o horário h, em um dia d, para o professor p, recebendo valor 1, caso afirmativo, ou valor 0 caso negativo. A função objetivo que minimiza a quantidade de janelas f_4, pode ser descrita como na Equação 3.18.

$$f_4 = min \sum_{d=1}^{D} \sum_{h=1}^{H} \sum_{p}^{P} JANELA_{dhp} \tag{3.18}$$

sujeito a:

$$JANELA_{dhp} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{t=1}^{T} X_{dhtp} = 1 \wedge \sum_{t=1}^{T} X_{d,h+1,t,p} = 0 \wedge \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=h}^{H} X_{ditp} \geq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.19}$$
$$\forall d \in D', h \in \{1, \ldots, H-2\}, p \in P'$$

O conjunto de restrições definido na Equação 3.19 define que, independente da turma, se um professor p possui uma aula alocada em um dia d e um horário h, não possui nenhuma aula alocada no próximo horário $h+1$ para nenhuma turma e a soma de todas as aulas desse professor entre o horário h e o último horário H é maior ou igual a 2, $JANELA_{dhp}$ recebe valor 1. Caso contrário, recebe valor 0.

3.1.4 Otimizações multiobjetivo

Apesar de uma única otimização no STP já fornecer diversos benefícios para as instituições de ensino, é desejável que um sistema que resolva o problema seja capaz de realizar diversas otimizações simultaneamente. Para atender à esta demanda, foi utilizado o método de Soma Ponderada dos Objetivos (seção 2.5).

A primeira tarefa a ser realizada ao se criar uma nova função objetivo, composta pela soma de diversas outras funções objetivo, é transformar todas as otimizações em maximização ou minimização. Por exemplo, para se criar uma otimização multiobjetivo que maximize o número de aulas geminadas, minimize o número de janelas e minimize o número de aulas triplas, podemos transformar os três casos em problemas de minimização.

Realizar a maximização de uma função $f(x)$ é equivalente a realizar a minimização de uma função $g(x) = -f(x)$ e vice versa. Logo, o exemplo citado anteriormente pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\min\ \alpha_1 * (-1)f_1 + \alpha_2 * f_2 + \alpha_3 * f_3 \tag{3.20}$$

Onde f_1 é a função de maximização de aulas geminadas, f_2 a função de minimização de janelas e f_3 a função que minimiza aulas triplas, enquanto α_1, α_2 e α_3 são os pesos correspondentes à cada função.

Desta maneira, é possível compor diversas otimizações de minimização e maximização simultaneamente no mesmo problema.

3.2 Materiais e métodos

Para o desenvolvimento do trabalho, foi utilizada a linguagem de programação Java™, versão 1.8.0_60. Esta linguagem foi escolhida devido à sua facilidade de execução em diversos sistemas operacionais, podendo, então, os modelos desenvolvidos neste trabalho ser executados em praticamente qualquer computador que uma instituição de ensino possuir.

Também foi utilizado o pacote proprietário IBM ILOG CPLEX, versão 12.6.1, que é um pacote específico para otimizações numéricas. Foi utilizada uma licença para estudantes, concedida pela empresa IBM para a Universidade Federal de Alfenas.

3.2.1 O padrão *Decorator* de projeto de software

O *Decorator* (decorador em inglês), ou *Wrapper* (embrulho em inglês), é um padrão de projeto de software desenvolvido para adicionar flexivelmente responsabilidades à um objeto (GAMMA et al., 1993). Sua principal vantagem é oferecer uma alternativa ao uso de herança quando existem muitas combinações possíveis de subclasses, de forma que, ao se aninhar recursivamente novas classes do Decorator, estruturas mais complexas de objetos possam ser criadas.

Neste trabalho, o padrão *Decorator* foi utilizado para se acrescentar novas camadas de otimizações à um modelo já existente, criando-se uma otimização multiobjetivo ou acrescentando novas responsabilidades à ela. Considerando que a quantidade de combinações possíveis de otimizações é muito grande, seria inviável utilizar a herança comum, criando uma subclasse do modelo básico de otimização para cada uma dessas combinações. Para esta estrutura funcionar, o *Decorator* deve obedecer à interface do seu componente "embrulhado"e encaminhar mensagens para ele, podendo executar ações antes ou depois do encaminhamento da mensagem (GAMMA et al., 1993).

4 Resultados

O modelo implementado em JAVA, com utilização do pacote proprietário CPLEX, foi testado em um laptop *MacBook Pro* 2015 com 8 GB de memória RAM e processador Intel Core i5 2.7 GHz. O sistema operacional utilizado foi o *macOS Sierra*, versão 10.12.6.

Foram feitos testes em 14 instâncias reais fornecidas por escolas, que por motivos de sigilo tiveram seus dados anonimizados, mas as características gerais de cada instância pode ser conferida na Tabela 1. Cada uma das instâncias foi submetida aos seguintes testes:

1. Busca Simples de Horários;
2. Otimizações Mono-Objetivo:
   a) Minimização de Aulas Isoladas;
   b) Maximização de Aulas Geminadas;
   c) Minimização de Aulas Trigêmeas;
   d) Minimização de Aulas Duplas;
   e) Minimização de Aulas Triplas;
   f) Proibição de Aulas Triplas;
   g) Minimização de Janelas;
3. Otimizações Multiobjetivo:
   a) Minimização de Janelas, Maximização de Aulas Geminadas e Minimização de Aulas Triplas (parâmetros α iguais à 100000, 100 e 1, respectivamente);
   b) Proibição de Aulas Triplas, Minimização de Aulas Duplas e Minimização de Janelas (parâmetros α iguais à 100 e 1 para a segunda e terceira otimizações, respectivamente. A proibição de aulas triplas não possui parâmetro α pois é uma restrição forte);

Das 14 instâncias testadas, 13 obtiveram sucesso em todas as otimizações propostas. A **Instância 01** retornou ser impossível obter solução para a proibição de aulas triplas, que por consequência impossibilitou a realização da segunda otimização multiobjetivo.

Todos os testes efetuados foram executados até encontrar uma solução ótima ou atingir um tempo máximo de 1 hora (3600 segundos), abortando-se, então, o processo e retornando a melhor solução até o momento. Para cada teste, foram coletadas as seguintes informações:

- Quantidade de aulas isoladas;
- Quantidade de aulas geminadas;
- Quantidade de aulas trigêmeas;
- Quantidade de dias em que um professor possui aulas duplas com uma turma;
- Quantidade de dias em que um professor possui aulas triplas com uma turma;
- Quantidade de janelas;
- Tempo de execução em segundos;
- Tempo de execução em *ticks* (medida utilizada pelo pacote CPLEX);
- Distância do ponto ótimo estimado caso a execução tenha sido abortada.

4.1 Tempo computacional

O tempo gasto para encontrar uma solução viável qualquer foi em média 0,28 segundos aproximadamente, com desvio padrão de cerca de 0,17 segundos. Este experimento mostra que o uso de PL para resolver o STP pode gerar soluções muito rapidamente, em contraste com a solução manual, que chega a levar de horas até dias.

Em relação às otimizações, cada instância demandou um tempo de processamento diferente para a conclusão, devido às características próprias das instâncias, como o número

Tabela 1 – Dados sobre as instâncias utilizadas nos testes

Instância	Professores	Turmas	Dias	Horários
01	10	5	5	5
02	8	5	5	5
03	25	14	5	6
04	21	12	5	6
05	27	10	5	5
06	29	8	6	6
07	26	13	5	6
08	22	12	5	6
09	19	15	5	6
10	29	8	6	6
11	22	12	5	6
12	29	12	5	8
13	26	15	5	6
14	27	15	5	6

Fonte: produzido pelo autor

de professores, turmas, dias e horários, além das matrizes de alocação professor-turma e de indisponibilidade de cada professor. Enquanto algumas otimizações acarretaram em um baixo acréscimo de tempo computacional, outras demandaram muito processamento para serem finalizadas (algumas vezes excedendo o tempo limite de 1 hora).

De modo geral, a otimização de **maximização de aulas geminadas** foi a que mais demandou tempo computacional, diversas vezes excedendo o tempo limite estabelecido. O tempo médio para esta otimização foi de 2613,74 segundos aproximadamente, com desvio padrão de 1625,52 segundos, o que indica que apesar de, em média, se demandar proporcionalmente muito mais tempo do que outras otimizações, a variação de tempo de uma instância para outra também é grande. Os resultados estatísticos sobre o tempo de execução de cada instância estão listados na Tabela 2.

Tabela 2 – Estatísticas de tempo de execução para cada otimização

	Tempo (Segundos)		Tempo (Ticks)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
Solução Simples	0,28	0,17	118,29	79,56
Minimização de Aulas Isoladas	1,74	1,07	801,15	555,25
Maximização de Aulas Geminadas	2613,74	1625,52	527760,97	343597,54
Minimização de Aulas Trigêmeas	6,39	7,02	2027,20	1837,05
Minimização de Aulas Duplas	615,31	1272,14	209580,06	429747,37
Minimização de Aulas Triplas	2,79	2,14	734,71	584,73
Proibição de Aulas Triplas	0,85	0,46	157,58	96,83
Minimização de Janelas	313,76	679,90	162476,22	359806,97
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	2660,55	1453,83	605047,72	351082,81
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	1773,38	1757,91	1806814,58	3503649,78

Fonte: produzido pelo autor

Os dados obtidos nos experimentos tiveram seus tempos de execução computados em segundos e em ***ticks***. Um *tick* é uma medida de tempo de processamento utilizada pelo pacote CPLEX para computar trabalho feito deterministicamente. O comprimento de um *tick* determinístico varia de plataforma para plataforma. Entretanto, esta medida é mais consistente que o tempo cronológico, pois possui relação com o software, hardware e carga de processamento atual (IBM, 2014).

Em relação às otimizações multiobjetivo, o tempo computacional gasto foi alto em relação às otimizações individuais. Porém, em alguns casos foi constatado que uma otimização multiobjetivo demandou menos tempo do que suas componentes isoladas.

4.2 Performance das otimizações

4.2.1 Otimizações mono-objetivo

Todas as otimizações propostas se mostraram bastante eficazes quando os resultados são comparados à uma busca simples de solução viável. A otimização que obteve o pior desempenho foi a **minimização de aulas duplas**, porém ainda assim conseguiu reduzir a quantidade de aulas duplas em aproximadamente 67%, em média. Podem ser destacadas as otimizações de **minimização de aulas triplas** e **minimização de janelas**, que obtiveram reduções de 91,8% e 90,3% respectivamente, em média, além da otimização de **maximização de aulas geminadas**, que aumentou em média 569% das aulas geminadas. Os dados referentes às otimizações individuais para cada instância, assim como a média e desvio padrão estão relacionados na Tabela 3.

Tabela 3 – Performances das otimizações individuais em comparação com a busca simples

	Min. Isoladas	Max. Geminadas	Min. Trigêmeas	Min. Duplas	Min. Triplas	Min. Janelas
Instância 01	0,00	4,16	0,00	0,58	0,14	0,00
Instância 02	0,00	6,00	0,00	0,21	0,00	0,00
Instância 03	0,60	4,64	0,00	0,38	0,00	0,21
Instância 04	1,00	5,24	1,00	0,27	0,00	0,26
Instância 05	0,00	6,47	1,00	0,46	1,00	0,00
Instância 06	0,20	3,88	0,00	0,45	0,00	0,15
Instância 07	0,00	8,76	0,00	0,24	0,00	0,00
Instância 08	1,00	8,23	1,00	0,19	0,00	0,36
Instância 09	1,00	6,84	0,00	0,13	0,00	0,19
Instância 10	0,25	3,37	0,00	0,47	0,00	0,18
Instância 11	0,11	16,88	0,00	0,01	0,00	0,00
Instância 12	0,00	6,93	0,00	0,33	0,00	0,00
Instância 13	0,00	7,34	0,00	0,36	0,00	0,00
Instância 14	0,00	4,96	0,00	0,47	0,00	0,00
Média	0,30	6,69	0,21	0,33	0,08	0,09
Desvio Padrão	0,41	3,35	0,43	0,16	0,27	0,13

Fonte: produzido pelo autor

4.2.2 Otimizações multiobjetivo

As duas otimizações multiobjetivo serão abordadas aqui em separado, devido às características únicas de cada uma.

4.2.2.1 Minimização de janelas, maximização de aulas geminadas e minimização de aulas triplas

A primeira otimização multiobjetivo é uma composição envolvendo a **minimização de janelas, maximização de aulas geminadas e minimização de aulas triplas**. Os parâmetros α foram definidos como 100000, 100 e 1, respectivamente para cada objetivo, com o intuito de dar maior importância à minimização de janelas, em seguida se maximizar as aulas geminadas e, por último, a minimização de aulas triplas.

Nesta primeira otimização multiobjetivo, as janelas foram reduzidas em cerca de 85%, em média, enquanto as aulas geminadas foram aumentadas em 764% em média, ambas comparando-se com a busca simples de solução viável, sem otimizações. As aulas triplas obtiveram um aumento de 83%, em média, em comparação com a busca simples, porém ao se efetuar comparações com outras otimizações mono-objetivo, é possível ver que as aulas triplas são mais frequentes. A Tabela 4 mostra a comparação entre a primeira otimização multiobjetivo e a busca de soluções viáveis. Uma comparação com as otimizações mono-objetivo pode ser feita através do Apêndice A.

Tabela 4 – Performance da otimização multiobjetivo de minimização de janelas, maximização de aulas geminadas e minimização de aulas triplas, em relação à busca simples de soluções viáveis

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Instância 01	1,00	50,00	4,00	48,00	20,00	0,00
Instância 02	1,00	6,00	0,00	1,71	0,00	0,00
Instância 03	1,00	3,55	1,00	1,42	1,20	0,32
Instância 04	2,00	4,38	11,00	1,52	1,80	0,37
Instância 05	3,33	6,00	5,00	1,73	8,00	0,00
Instância 06	0,20	3,88	1,00	1,61	0,60	0,15
Instância 07	3,00	2,19	4,00	1,06	1,13	0,06
Instância 08	1,00	8,08	1,00	1,11	1,00	0,36
Instância 09	2,00	5,64	3,75	1,58	1,73	0,25
Instância 10	0,25	3,37	4,00	1,69	0,67	0,18
Instância 11	1,89	11,50	13,00	1,67	6,75	0,13
Instância 12	0,67	5,19	0,29	1,49	0,08	0,22
Instância 13	1,00	6,31	4,50	2,15	0,67	0,04
Instância 14	0,00	4,96	0,00	1,91	0,00	0,00
Média	1,31	8,65	3,75	4,97	1,83	0,15
Desvio Padrão	1,00	12,12	3,95	12,39	2,45	0,14

Fonte: produzido pelo autor

4.2.2.2 Proibição de aulas triplas, minimização de aulas duplas e minimização de janelas

No caso da segunda otimização multiobjetivo, que é uma composição de **proibição de aulas triplas, minimização de aulas duplas e minimização de janelas**, somente o segundo e terceiro objetivos possuem parâmetros α, por serem restrições fracas, enquanto a proibição de aulas triplas é uma restrição forte. Os dois parâmetros α foram definidos como 100 e 1 para a minimização de aulas duplas e minimização de janelas, respectivamente.

Devido à **Instância 01** não possuir solução para a proibição de aulas triplas, ela foi ignorada para as comparações de performance. Nesta otimização, além da eliminação de aulas triplas, a redução de aulas duplas foi de aproximadamente 60%, em média. Além disso, a quantidade de janelas foi reduzida em cerca de 66% em média.

Uma visualização completa da comparação de performance entre a segunda otimização e a busca simples por soluções viáveis pode ser vista na Tabela 5. Além disso, esta otimização pode ser comparada às otimizações mono-objetivo através do Apêndice A.

Tabela 5 – Performance da otimização multiobjetivo de proibição de aulas triplas, minimização de aulas duplas e minimização de janelas, em relação à busca simples de soluções viáveis

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Instância 02	-50.00%	-75.00%	-100.00%	-67.86%	-100.00%	-81.25%
Instância 03	0.00%	-63.64%	-100.00%	-53.73%	-100.00%	-68.42%
Instância 04	0.00%	-85.71%	0.00%	-73.44%	-100.00%	-47.37%
Instância 05	133.33%	-66.67%	0.00%	-46.15%	0.00%	-94.44%
Instância 06	-40.00%	-88.46%	-100.00%	-38.71%	-100.00%	-53.85%
Instância 07	133.33%	-66.67%	-100.00%	-68.75%	-100.00%	-63.64%
Instância 08	0.00%	-84.62%	0.00%	-81.48%	-100.00%	-63.64%
Instância 09	0.00%	-84.00%	-100.00%	-74.75%	-100.00%	-50.00%
Instância 10	-25.00%	-70.00%	-100.00%	-35.59%	-100.00%	-45.45%
Instância 11	22.22%	-100.00%	-100.00%	-98.33%	-100.00%	-84.62%
Instância 12	-33.33%	-74.07%	-100.00%	-36.54%	-100.00%	-85.37%
Instância 13	100.00%	-62.07%	-100.00%	-60.92%	-100.00%	-60.00%
Instância 14	-60.00%	-53.33%	-100.00%	-41.03%	-100.00%	-62.50%
Média	13.89%	-74.94%	-76.92%	-59.79%	-92.31%	-66.20%
Desvio Padrão	66.44%	12.99%	43.85%	19.70%	27.74%	15.81%

Fonte: produzido pelo autor

4.3 Distância do ponto ótimo

Através das técnicas de otimização combinatória e programação linear, o pacote CPLEX consegue calcular a distância máxima do ponto ótimo que a otimização está no momento. Essa distância do ponto ótimo é salva no *log* de execução do pacote, junto com as informações sobre o tempo de execução, e é atualizada conforme a otimização avança.

A distância do ponto ótimo é particularmente útil quando se extrapola o tempo limite de execução do algoritmo. Pode-se, então, saber que à partir do ponto onde a execução foi interrompida, só é possível melhorar a solução em uma certa porcentagem.

Nos testes efetuados durante este trabalho, a otimização de **maximização de aulas geminadas** foi a que por mais vezes foi interrompida ao extrapolar o limite de 1 hora de tempo de execução. Dentre as 14 instâncias testadas, em 9 casos esta otimização foi interrompida, quando a solução ainda poderia ser aprimorada, em média, 17,67% no melhor caso, com desvio padrão de 13,32%.

Para a otimização multiobjetivo de **minimização de janelas, maximização de aulas geminadas e minimização de aulas triplas**, o tempo limite foi atingido também em 9 casos, permitindo que as soluções fossem ainda aprimoradas em aproximadamente 66,6% no melhor caso, em média. O desvio padrão neste caso foi de 46,42%.

A segunda otimização multiobjetivo, de **proibição de aulas triplas, minimização de aulas duplas e minimização de janelas** foi interrompida em apenas 5 das 14 instâncias. Para os casos onde o algoritmo foi finalizado fora do ponto ótimo, ainda seria possível melhorar a solução em cerca de 2,63%, em média, com desvio padrão de aproximadamente 5%.

Os dados referentes às distâncias dos pontos ótimos podem ser encontrados no Apêndice A.

5 Conclusão

Ao final deste trabalho foi possível concluir que a utilização de técnicas de programação linear inteira podem ser eficazes para a solução do *School Timetabling Problem*. Tanto o problema simples de busca por qualquer solução viável quanto as otimizações mono e multiobjetivo se mostraram passíveis de solução através das técnicas abordadas.

Nos testes realizados, foi possível comparar a eficiência dos modelos implementados e foi verificado que, para a grande maioria das instâncias utilizadas, um tempo limite de 1 hora é suficiente para o algoritmo encontrar a solução ótima. Entretanto, mesmo nos casos onde o tempo máximo foi excedido, os resultados foram satisfatórios, melhorando as soluções iniciais em mais de 65%, o que poderia levar diversas horas em uma otimização manual. Para o uso em produção, pode-se ajustar o tempo limite de acordo com as necessidades das instituições de ensino, podendo gerar soluções melhores caso haja disponibilidade de tempo.

O padrão de projeto de software *Decorator* se mostrou uma boa alternativa para que o modelo de otimização criado seja expansível e de fácil manutenção. Novas otimizações podem ser criadas facilmente através da implementação da interface *Decorator*.

Por fim, foi possível verificar que apesar de o *School Timetabling Problem* normalmente ser mais simples que outras versões do *Timetabling Problem*, técnicas automatizadas para sua resolução devem ser encorajadas nas instituições de ensino. A economia com recursos de mão de obra e tempo gasto, além de uma capacidade de gerar soluções ótimas para cada necessidade, podem aprimorar a qualidade do ensino nas escolas ao mesmo tempo que se reduzem os custos para os envolvidos.

Referências

ABRAMSON, D. Constructing School Timetables Using Simulated Annealing: Sequential and Parallel Algorithms. *Management Science*, v. 37, n. 1, p. 98–113, 1991. ISSN 0025-1909. Disponível em: <http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/mnsc.37.1.98>. Citado na página 33.

ABRAMSON, D.; AMOORTHY, M. K.; DANG, H. Simulated annealing cooling schedules for the school timetabling problem. *Asia -Pacific Journal of Operational Research Technology Collection pg*, v. 16, n. 1, 1999. Disponível em: <https://search.proquest.com/docview/204763295/fulltextPDF/BBE03D2D1F584B5APQ/1?accountid=146849>. Citado na página 36.

AZUMA, R. M. Otimização multiobjetivo em problema de estoque e roteamento gerenciados pelo fornecedor. *Dissertação de Mestrado da Universidade Estaduai de Campinas - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação*, [s.n.], p. 99, 2011. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/259081ftp://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/theses/ReginaMitsueAzuma.pdf>. Citado na página 36.

BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. *Linear programming and network flows; 3rd ed.* Hoboken, NJ: Wiley, 2005. The book can be consulted by contacting: PH-ADT-DQ: Al-Shabibi, Ali. Disponível em: <http://cds.cern.ch/record/1226973>. Citado na página 34.

BUCCO, G. B. et al. Desenvolvimento de um modelo de programação linear para o Problema da Construção de Grades Horárias em Universidades. *Gestão & Produção*, Universidade Federal de São Carlos, v. 24, n. 1, p. 40–49, 4 2017. ISSN 0104-530X. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-530X2017000100040&lng=pt&tlng=pt>. Citado na página 37.

CISCON, L. A. *O problema de geração de horários: um foco na eliminação de janelas e aulas isoladas.* Tese (Doutorado), 4 2006. Disponível em: <http://repositorio.ufla.br/handle/1/5521>. Citado na página 37.

COOPER, T. B.; KINGSTON, J. H. The solution of real instances of the timetabling problem. *The Computer Journal*, Oxford University Press, v. 36, n. 7, p. 645–653, 1993. Citado na página 37.

COSTA, D. A tabu search algorithm for computing an operational timetable. *European Journal of Operational Research*, v. 76, n. 1, p. 98–110, 7 1994. ISSN 03772217. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0377221794900094>. Citado na página 36.

EIBEN, A. E.; SMITH, J. E. *Introduction to Evolutionary Computing.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. 299 p. (Natural Computing Series). ISSN 1063-6560. ISBN 978-3-540-40184-1. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-44874-8>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

GAMMA, E. et al. Design patterns: Abstraction and reuse of object-oriented design. *European Conference on*, 1993. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-47910-4_21>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. [S.l.]: Elsevier, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

HOLLAND JOHN;LANGTON, C. S. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to BioLogy, Control, and Artificial Intelligence*. MIT Press, 1992. 211 p. ISBN 9780262581110. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=5EgGaBkwvWcC&printsec=frontcover&dq=adaptation+in+natural+and+artificial+systems&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwiFhfG-5cXVAhVDhpAKHfuaCmYQ6AEIJjAA#v=onepage&q=adaptationinnaturalandartificialsystems&f=false>. Citado na página 35.

IBM. *IBM Knowledge Center - Deterministic Time Limit*. 2014. Disponível em: <https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/en/SSSA5P_12.6.1/ilog.odms.cplex.help/CPLEX/Parameters/topics/DetTiLim.html>. Citado na página 49.

KRISTIANSEN, S.; STIDSEN, T. R. A Comprehensive Study of Educational Timetabling, a Survey. *A Comprehensive Study of Educational Timetabling - a Survey*, v. 978-87-931, n. November, p. 72, 2013. Disponível em: <http://orbit.dtu.dk/fedora/objects/orbit:126108/datastreams/file_eaf7955a-7a9a-433e-b7aa-dfe50409fd3a/contenthttp://orbit.dtu.dk/files/60366101/A_Comprehensive_Study.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

MICHAELIS. *Moderno dicionário da língua portuguesa*. [s.n.], 2004. 2259 p. ISBN 978-85-06-06953-0. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>. Citado na página 27.

PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity*. Mineola, NY: Dover, 1998. Disponível em: <http://cds.cern.ch/record/453497>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.

PILLAY, N. A survey of school timetabling research. *Annals of Operations Research*, v. 218, n. 1, p. 261–293, 2014. ISSN 15729338. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10479-013-1321-8>. Citado 4 vezes nas páginas 29, 30, 33 e 37.

POST, G. et al. An XML format for benchmarks in High School Timetabling. *Annals of Operations Research*, Springer US, v. 194, n. 1, p. 385–397, 4 2012. ISSN 0254-5330. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s10479-010-0699-9>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 37.

SCHAERF, A. Survey of automated timetabling. *Artificial Intelligence Review*, v. 13, n. 2, p. 87–127, 1999. ISSN 02692821. Disponível em: <http://www.springerlink.com/index/qk4v577r81m53375.pdf>. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 29 e 37.

SMITH, A. The theory of moral sentiments. 2010. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=iS5f-xlvRrwC&oi=fnd&pg=PT8&dq=adam+smith+theory+of+moral+sentiments&ots=XGqOxBzB_Y&sig=BmAEo2FOhRN9o-wsqqxZZ_WAX4g>. Citado na página 23.

SOUSA, V. N. d.; MORETTI, A. C.; PODESTÁ, V. A. d. Programação da grade de horário em escolas de ensino fundamental e médio. *Pesquisa Operacional*, SOBRAPO, v. 28, n. 3, p. 399–421, 12 2008. ISSN 0101-7438. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-74382008000300002&lng=pt&tlng=pt>. Citado na página 29.

WERRA, D. de. An introduction to timetabling. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 19, n. 2, p. 151–162, 1985. Citado na página 37.

WILLEMEN, R. *School timetable construction; algorithms and complexity.* Technische Universiteit Eindhoven, 2002. ISBN 9038610114. Disponível em: <https://www.narcis.nl/publication/RecordID/oai:library.tue.nl:553569http://en.scientificcommons.org/17599989>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 29.

YOSHIKAWA, M. et al. A constraint-based high school scheduling system. *IEEE Expert*, IEEE, v. 11, n. 1, p. 63–72, 1996. Citado na página 37.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados das Otimizações Testadas

Estão listados, à seguir, os resultados de todos os testes efetuados, separados por instância. Nas tabelas onde a **distância do ponto ótimo** é igual a zero, considera-se que o pacote CPLEX foi capaz de encontrar uma solução ótima para o problema, dentro do tempo limite de uma hora.

A.1 Instância 01

Tabela 6 – Resultados para a Instância 01

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	1	12	4	38	7	2
Minimização de Aulas Isoladas	0	12	7	38	13	2
Maximização de Aulas Geminadas	0	50	17	44	15	2
Minimização de Aulas Trigêmeas	1	4	0	33	12	2
Minimização de Aulas Duplas	1	14	9	22	18	3
Minimização de Aulas Triplas	1	8	2	42	1	4
Proibição de Aulas Triplas	-	-	-	-	-	-
Minimização de Janelas	1	9	4	35	9	0
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	1	50	4	48	2	0
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	-	-	-	-	-	-

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 7 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 01

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,05	12,14	0%
Minimização de Aulas Isoladas	0,12	35,02	0%
Maximização de Aulas Geminadas	1,63	452,30	0%
Minimização de Aulas Trigêmeas	0,35	130,25	0%
Minimização de Aulas Duplas	17,02	5351,99	0%
Minimização de Aulas Triplas	0,52	76,56	0%
Proibição de Aulas Triplas	0,08	10,09	0%
Minimização de Janelas	0,71	193,70	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	16,64	5268,23	0%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	0,32	129,73	0%

Fonte: produzido pelo autor

A.2 Instância 02

Tabela 8 – Resultados para a Instância 02

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	4	8	1	28	3	16
Minimização de Aulas Isoladas	0	14	6	36	6	10
Maximização de Aulas Geminadas	2	48	5	48	7	4
Minimização de Aulas Trigêmeas	4	6	0	25	6	17
Minimização de Aulas Duplas	3	4	3	6	4	13
Minimização de Aulas Triplas	4	9	0	31	0	11
Proibição de Aulas Triplas	5	4	0	25	0	10
Minimização de Janelas	6	11	3	27	5	0
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	4	48	0	48	0	0
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	2	2	0	9	0	3

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 9 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 02

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,04	13,91	0%
Minimização de Aulas Isoladas	0,24	61,29	0%
Maximização de Aulas Geminadas	15,48	8287,10	0%
Minimização de Aulas Trigêmeas	0,62	205,76	0%
Minimização de Aulas Duplas	7,90	2953,54	0%
Minimização de Aulas Triplas	0,58	74,11	0%
Proibição de Aulas Triplas	0,27	16,85	0%
Minimização de Janelas	1,19	280,93	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	356,40	119009,65	0%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	368,24	190109,54	0%

Fonte: produzido pelo autor

A.3 Instância 03

Tabela 10 – Resultados para a Instância 03

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	5	22	4	67	10	19
Minimização de Aulas Isoladas	3	22	3	70	10	18
Maximização de Aulas Geminadas	4	102	6	106	19	12
Minimização de Aulas Trigêmeas	4	5	0	63	4	20
Minimização de Aulas Duplas	5	5	1	26	10	19
Minimização de Aulas Triplas	5	11	0	68	0	18
Proibição de Aulas Triplas	4	20	0	67	0	18
Minimização de Janelas	4	23	0	66	10	4
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	5	78	4	95	12	6
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	5	8	0	31	0	6

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 11 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 03

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,33	153,64	0%
Minimização de Aulas Isoladas	2,77	1365,32	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3600,38	873604,90	31,37%
Minimização de Aulas Trigêmeas	8,12	2066,69	0%
Minimização de Aulas Duplas	137,49	45470,11	0%
Minimização de Aulas Triplas	2,95	913,90	0%
Proibição de Aulas Triplas	0,84	214,15	0%
Minimização de Janelas	2611,99	1377717,86	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	3600,15	1012737,00	68,33%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	3335,96	956245,27	0%

Fonte: produzido pelo autor

A.4 Instância 04

Tabela 12 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 04

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	1	21	0	64	10	19
Minimização de Aulas Isoladas	1	20	0	60	10	21
Maximização de Aulas Geminadas	1	110	7	110	26	15
Minimização de Aulas Trigêmeas	1	14	0	65	6	20
Minimização de Aulas Duplas	1	2	0	17	0	15
Minimização de Aulas Triplas	1	15	0	62	0	18
Proibição de Aulas Triplas	1	10	0	58	0	17
Minimização de Janelas	1	20	4	65	7	5
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	2	92	10	97	18	7
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	1	3	0	17	0	10

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 13 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 04

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,34	191,05	0%
Minimização de Aulas Isoladas	1,76	792,57	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3600,45	720483,13	34,09%
Minimização de Aulas Trigêmeas	2,75	1359,63	0%
Minimização de Aulas Duplas	138,03	46218,90	0%
Minimização de Aulas Triplas	3,23	1137,08	0%
Proibição de Aulas Triplas	1,10	232,26	0%
Minimização de Janelas	483,69	277929,57	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	3600,13	587654,47	44,12%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	2848,71	1175089,32	0%

Fonte: produzido pelo autor

A.5 Instância 05

Tabela 14 – Resultados para a Instância 05

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Simples	3	15	0	52	0	18
Minimização de Aulas Isoladas	0	18	2	57	4	14
Maximização de Aulas Geminadas	4	97	10	95	8	6
Minimização de Aulas Trigêmeas	2	9	0	61	3	17
Minimização de Aulas Duplas	3	6	0	24	5	19
Minimização de Aulas Triplas	2	14	0	69	0	15
Proibição de Aulas Triplas	6	17	0	55	0	12
Minimização de Janelas	9	9	0	54	3	0
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	10	90	4	90	7	0
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	7	5	0	28	0	1

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 15 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 05

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Simples	0,33	62,21	0%
Minimização de Aulas Isoladas	1,68	920,28	0%
Maximização de Aulas Geminadas	561,13	154783,78	0%
Minimização de Aulas Trigêmeas	2,25	824,08	0%
Minimização de Aulas Duplas	18,40	6473,15	0%
Minimização de Aulas Triplas	1,36	342,84	0%
Proibição de Aulas Triplas	0,34	58,88	0%
Min. Janelas	46,32	26692,59	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	3600,04	943900,38	7,31%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	71.75	31197.95	0%

Fonte: produzido pelo autor

A.6 Instância 06

Tabela 16 – Resultados para a Instância 06

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	5	26	4	62	10	13
Minimização de Aulas Isoladas	1	26	4	65	10	8
Maximização de Aulas Geminadas	1	101	10	96	13	5
Minimização de Aulas Trigêmeas	5	16	0	60	8	12
Minimização de Aulas Duplas	2	21	3	28	17	10
Minimização de Aulas Triplas	1	18	0	66	0	11
Proibição de Aulas Triplas	2	16	0	62	0	10
Minimização de Janelas	2	24	1	60	13	2
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	1	101	4	100	6	2
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	3	3	0	38	0	6

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 17 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 06

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,12	49,49	0%
Minimização de Aulas Isoladas	0,64	242,17	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3600,60	915214,18	4,21%
Minimização de Aulas Trigêmeas	1,56	638,34	0%
Minimização de Aulas Duplas	45,45	18420,01	0%
Minimização de Aulas Triplas	0,49	154,43	0%
Proibição de Aulas Triplas	0,88	114,93	0%
Minimização de Janelas	3,45	2198,11	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	2267,84	562841,52	0%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	22,72	10686,60	0%

Fonte: produzido pelo autor

A.7 Instância 07

Tabela 18 – Resultados para a Instância 07

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	3	21	1	80	8	33
Minimização de Aulas Isoladas	0	25	4	74	9	31
Maximização de Aulas Geminadas	0	184	14	176	14	11
Minimização de Aulas Trigêmeas	4	13	0	77	9	46
Minimização de Aulas Duplas	6	8	3	19	5	38
Minimização de Aulas Triplas	2	14	0	70	0	33
Proibição de Aulas Triplas	2	26	0	85	0	37
Minimização de Janelas	7	27	3	81	11	0
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	9	46	4	85	9	2
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	7	7	0	25	0	12

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 19 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 07

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,30	168,42	0%
Minimização de Aulas Isoladas	2,37	1326,76	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3600,26	565530,63	5,98%
Minimização de Aulas Trigêmeas	6,29	2284,30	0%
Minimização de Aulas Duplas	310,19	114128,47	0%
Minimização de Aulas Triplas	3,59	757,47	0%
Proibição de Aulas Triplas	1,34	186,05	0%
Minimização de Janelas	278,83	143077,54	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	3600,47	680355,58	109,98%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	3600,12	1032500,30	1,48%

Fonte: produzido pelo autor

A.8 Instância 08

Tabela 20 – Resultados para a Instância 08

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	0	13	0	54	2	11
Minimização de Aulas Isoladas	0	7	1	47	2	8
Maximização de Aulas Geminadas	0	107	1	112	6	7
Minimização de Aulas Trigêmeas	0	6	0	45	3	10
Minimização de Aulas Duplas	0	3	0	10	0	11
Minimização de Aulas Triplas	0	10	0	42	0	8
Proibição de Aulas Triplas	0	16	0	50	0	9
Minimização de Janelas	0	13	0	44	1	4
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	0	105	0	114	2	4
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	0	2	0	10	0	4

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 21 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 08

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,42	237,04	0%
Minimização de Aulas Isoladas	2,16	996,20	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3600,28	618242,32	27,57%
Minimização de Aulas Trigêmeas	9,44	3469,24	0%
Minimização de Aulas Duplas	15,46	6987,37	0%
Minimização de Aulas Triplas	6,13	1938,85	0%
Proibição de Aulas Triplas	1,15	256,08	0%
Minimização de Janelas	44,10	24318,72	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	3600,37	1000866,29	0,80%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	79,18	35762,57	0%

Fonte: produzido pelo autor

A.9 Instância 09

Tabela 22 – Resultados para a Instância 09

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	0	25	4	99	15	16
Minimização de Aulas Isoladas	0	22	4	81	15	11
Maximização de Aulas Geminadas	0	171	19	168	34	10
Minimização de Aulas Trigêmeas	0	17	0	87	14	15
Minimização de Aulas Duplas	1	12	5	13	11	12
Minimização de Aulas Triplas	0	11	0	91	0	16
Proibição de Aulas Triplas	0	23	0	100	0	16
Minimização de Janelas	1	25	3	94	23	3
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	1	141	15	156	26	4
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	0	4	0	25	0	8

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 23 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 09

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,48	190,10	0%
Minimização de Aulas Isoladas	3,08	1344,27	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3600,32	595052,92	30,41%
Minimização de Aulas Trigêmeas	27,10	7256,87	0%
Minimização de Aulas Duplas	490,30	199762	0%
Minimização de Aulas Triplas	4,45	1517,86	0%
Proibição de Aulas Triplas	1,47	254,13	0%
Minimização de Janelas	62,93	36329,91	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	3600,21	655641,21	37,58%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	70,89	35529,04	0%

Fonte: produzido pelo autor

A.10 Instância 10

Tabela 24 – Resultados para a Instância 10

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	4	30	1	59	12	11
Minimização de Aulas Isoladas	1	34	8	58	18	14
Maximização de Aulas Geminadas	1	101	12	93	12	5
Minimização de Aulas Trigêmeas	1	28	0	67	5	10
Minimização de Aulas Duplas	2	14	5	28	16	8
Minimização de Aulas Triplas	2	24	0	70	0	11
Proibição de Aulas Triplas	6	14	0	59	0	13
Minimização de Janelas	2	29	3	64	13	2
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	1	101	4	100	8	2
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	3	9	0	38	0	6

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 25 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 10

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,11	55,54	0%
Minimização de Aulas Isoladas	0,82	262,41	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3600,26	843543,28	3,17%
Minimização de Aulas Trigêmeas	1,64	584,35	0%
Minimização de Aulas Duplas	38,63	1241,44	0%
Minimização de Aulas Triplas	0,82	215,85	0%
Proibição de Aulas Triplas	0,97	124,11	0%
Minimização de Janelas	2,41	1525,83	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	2156,56	511155,49	0%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	28,92	1673,06	0%

Fonte: produzido pelo autor

A.11 Instância 11

Tabela 26 – Resultados para a Instância 11

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	9	8	1	60	4	78
Minimização de Aulas Isoladas	1	25	4	79	12	64
Maximização de Aulas Geminadas	7	135	6	133	12	45
Minimização de Aulas Trigêmeas	11	11	0	69	4	75
Minimização de Aulas Duplas	5	1	0	1	0	82
Minimização de Aulas Triplas	10	25	0	88	0	62
Proibição de Aulas Triplas	8	10	0	61	0	74
Minimização de Janelas	24	14	2	66	7	0
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	17	92	13	100	27	10
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	11	0	0	1	0	12

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 27 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 11

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,07	22,79	0%
Minimização de Aulas Isoladas	0,70	204,49	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3607,37	562475,24	17,78%
Minimização de Aulas Trigêmeas	2,72	1540,29	0%
Minimização de Aulas Duplas	2,29	347,52	0%
Minimização de Aulas Triplas	1,04	297,52	0%
Proibição de Aulas Triplas	0,13	23,04	0%
Minimização de Janelas	23,74	13112,55	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	3600,09	574403,24	101,81%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	3600,04	1400139,22	11,50%

Fonte: produzido pelo autor

A.12 Instância 12

Tabela 28 – Resultados para a Instância 12

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	3	27	7	104	36	41
Minimização de Aulas Isoladas	0	52	18	103	40	37
Maximização de Aulas Geminadas	1	187	35	168	35	26
Minimização de Aulas Trigêmeas	2	10	0	107	19	48
Minimização de Aulas Duplas	2	18	8	34	32	34
Minimização de Aulas Triplas	1	14	0	114	0	42
Proibição de Aulas Triplas	3	16	0	117	0	49
Minimização de Janelas	3	35	5	110	36	0
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	2	140	2	155	3	9
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	2	7	0	66	0	6

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 29 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 12

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,41	149,70	0%
Minimização de Aulas Isoladas	2,14	1051,74	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3600,32	628581,22	0%
Minimização de Aulas Trigêmeas	5,29	2537,35	0%
Minimização de Aulas Duplas	3600,22	1300013,70	0%
Minimização de Aulas Triplas	2,38	784,26	0%
Proibição de Aulas Triplas	1,01	246,13	0%
Minimização de Janelas	368,98	193510,18	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	3600,22	988934,80	102,35%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	3600,02	11976559,93	0,06%

Fonte: produzido pelo autor

A.13 Instância 13

Tabela 30 – Resultados para a Instância 13

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	1	29	2	87	12	25
Minimização de Aulas Isoladas	0	22	2	92	7	29
Maximização de Aulas Geminadas	0	213	11	201	15	8
Minimização de Aulas Trigêmeas	0	12	0	79	10	28
Minimização de Aulas Duplas	2	12	0	31	8	28
Minimização de Aulas Triplas	1	20	0	86	0	34
Proibição de Aulas Triplas	1	21	0	92	0	34
Minimização de Janelas	3	34	4	93	11	0
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	1	183	9	187	8	1
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	2	11	0	34	0	10

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 31 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 13

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,59	216,52	0%
Minimização de Aulas Isoladas	3,44	1753,36	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3600,54	900605,60	4,46%
Minimização de Aulas Trigêmeas	11,65	2877,29	0%
Minimização de Aulas Duplas	192,85	62348,86	0%
Minimização de Aulas Triplas	6,85	1338,29	0%
Proibição de Aulas Triplas	1,27	259,13	0%
Minimização de Janelas	252,92	107578,43	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	3600,12	819055,50	127,01%
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	3600,12	7448829,07	0,04%

Fonte: produzido pelo autor

A.14 Instância 14

Tabela 32 – Resultados para a Instância 14

	Isoladas	Geminadas	Trigêmeas	Duplas	Triplas	Janelas
Solução Simples	5	45	5	117	22	24
Minimização de Aulas Isoladas	0	51	20	122	35	23
Maximização de Aulas Geminadas	0	223	32	203	22	4
Minimização de Aulas Trigêmeas	6	28	0	119	13	26
Minimização de Aulas Duplas	4	28	7	55	18	21
Minimização de Aulas Triplas	2	30	0	105	0	29
Proibição de Aulas Triplas	2	38	0	118	0	24
Minimização de Janelas	1	60	17	114	23	0
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	0	223	0	223	0	0
Proib. Triplas + Min. Duplas + Min. Janelas	2	21	0	69	0	9

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 33 – Tempos de Execução e Distâncias do Ponto Ótimo para a Instância 14

	Tempo (Segundos)	Tempo (*Ticks*)	Distância do Ponto Ótimo
Solução Simples	0,32	133,51	0%
Minimização de Aulas Isoladas	2,39	860,24	0%
Maximização de Aulas Geminadas	3,33	1796,97	0%
Minimização de Aulas Trigêmeas	9,61	2606,34	0%
Minimização de Aulas Duplas	3600,16	1124403,72	9,82%
Minimização de Aulas Triplas	4,67	736,93	0%
Proibição de Aulas Triplas	1,02	210,33	0%
Minimização de Janelas	211,44	70201,12	0%
Min. Janelas + Max. Geminadas + Min. Triplas	48,48	8844,74	0%
Proib. Triplas + Min, Duplas + Min, Janelas	3600,30	1000952,47	0,05%

Fonte: produzido pelo autor