Universidade Federal de Alfenas

Algoritmos em Grafos

Aula 16 – Fluxo Máximo: Método de Ford-Fulkerson

Prof. Humberto César Brandão de Oliveira
humberto@bcc.unifal-mg.edu.br

Relembrando...

- Aula passada:
  - Introdução ao problema de fluxo máximo...
    - Qual a **quantidade máxima** de material podemos enviar em uma rede?
  - Exemplos de aplicações:
    - Transporte de fluidos;
    - Redes de computadores;

Relembrando...

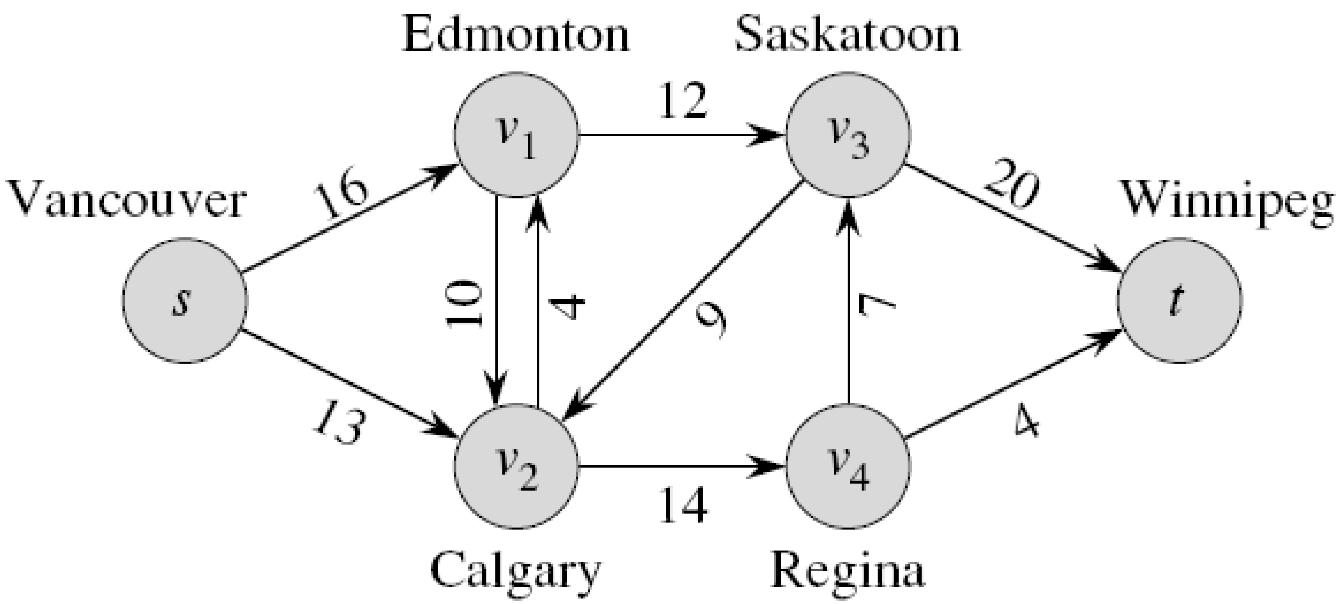
- **Aula passada:**
  - Dada uma rede de fluxo $G=(V,A)$, onde cada aresta possui uma <u>capacidade</u> **não negativa**...
    - $c(u,v) > 0$ *para todo* $u,v \in A$
  - O objetivo é localizar o fluxo máximo (*fm*) nesta rede.

Relembrando…

- Aula passada:
  - Dois vértices do grafo devem estar em evidência:
    - Origem *s (source)*;
    - Destino *t (sink)*;
  - Obviamente, existe ao menos um caminho de *s* até *t* no grafo;

Fluxo Máximo
Formalizando...

- Exemplo de grafo de fluxo:



Relembrando…

- Aula passada:
  - Um fluxo em G é uma função real

$$f : V \times V \to \Re$$

  - Que satisfaz três propriedades:
    - Restrição de **capacidade**;
    - **Anti-simetria** oblíqua;
    - **Conservação** de fluxo;

Relembrando…

- Aula passada:
  - A rede residual consiste em arestas que podem admitir mais fluxo.
  - Seja f um fluxo em G, e considere um par de vértices $u,v \in V$:
    - A quantidade de fluxo adicional que podemos "empurrar" de u para v antes de exceder a capacidade $c(u,v)$ é a capacidade residual.

Método de Ford-Fulkerson

Método de Ford-Fulkerson

- Assim como o método genérico para a Árvore Geradora Mínima, o método de Ford-Fulkerson possui um algoritmo geral:

$$
\begin{aligned}
&\text{FORD-FULKERSON}(G, s, t)\\
&\quad \text{inicializar fluxo } f \text{ com } 0\\
&\quad \text{enquanto existir um caminho aumentante } p \text{ em } G\\
&\qquad \text{ampliar fluxo } f \text{ ao longo do caminho } p\\
&\quad \text{fim enquanto}\\
&\quad \text{retornar fluxo máximo e o vetor } f\\
&\text{fim.}
\end{aligned}
$$

Método de Ford-Fulkerson

- Com o conceito de redes residuais, podemos verificar se existe um caminho aumentante em G, com base na rede residual $G_f = (V, A_f)$

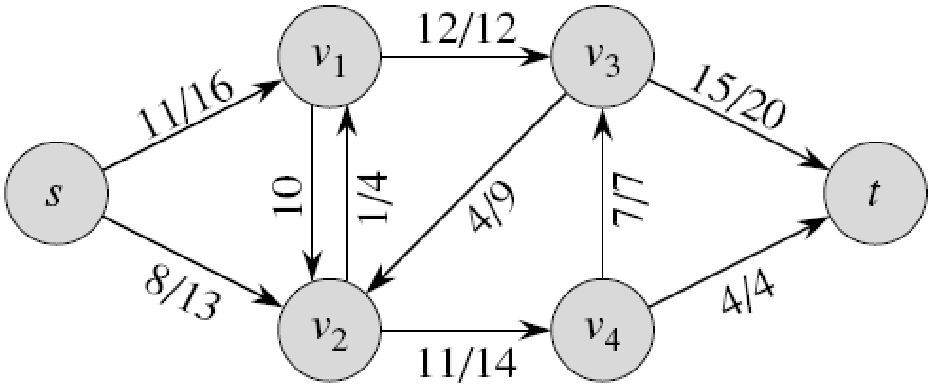
$$G_f = (V, A_f)$$

$$A_f = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0\}$$

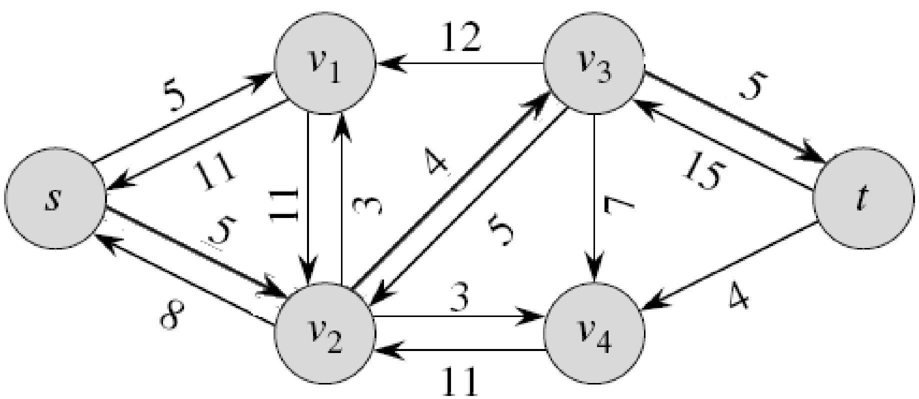
$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

Método de Ford-Fulkerson

$$G = (V, A)$$



$$G_f = (V, A_f)$$

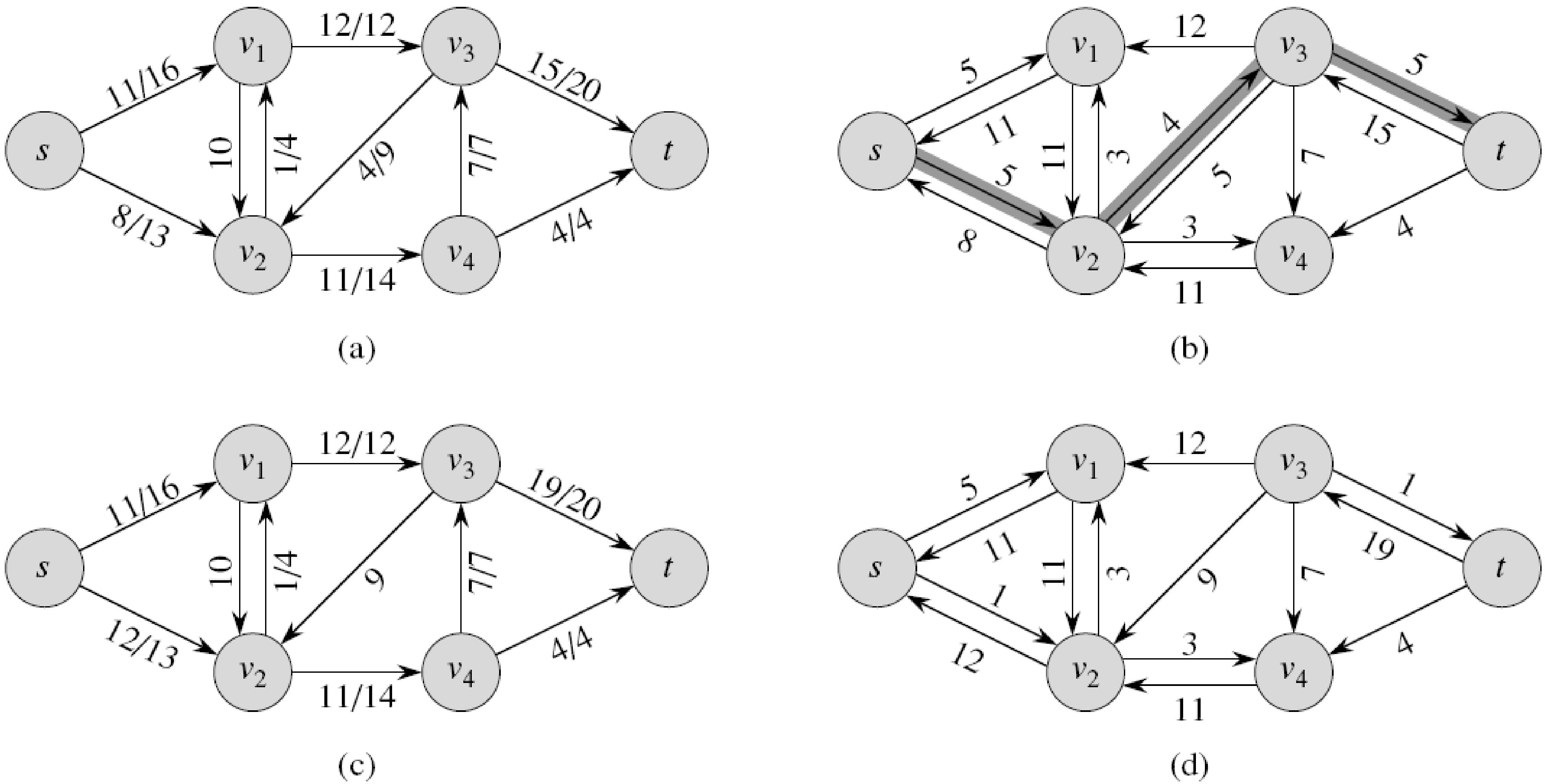


Método de Ford-Fulkerson

- Após localizado o caminho aumentante, devemos aumentar o fluxo ao longo deste caminho.
  - Note que isso não afeta a propriedade de conservação de fluxo.

```
FORD-FULKERSON(G, s, t)
  inicializar fluxo f com 0
  enquanto existir um caminho aumentante p em G
    ampliar fluxo f ao longo do caminho p
  fim enquanto
  retornar fluxo máximo e o vetor f
fim.
```

Método de Ford-Fulkerson



Proposto em 1955

FORD-FULKERSON(G, s, t)

para cada aresta $(u, v) \in A$ faça

$f[u,v] \leftarrow 0$

$f[v,u] \leftarrow 0$

fim para

enquanto existir um caminho p de s ate t em Gf

$c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ está no caminho } p\}$

para cada aresta (u, v) em p faça

$f[u,v] \leftarrow f[u,v] + c_f(p)$

$f[v,u] \leftarrow -f[u,v]$

fim para

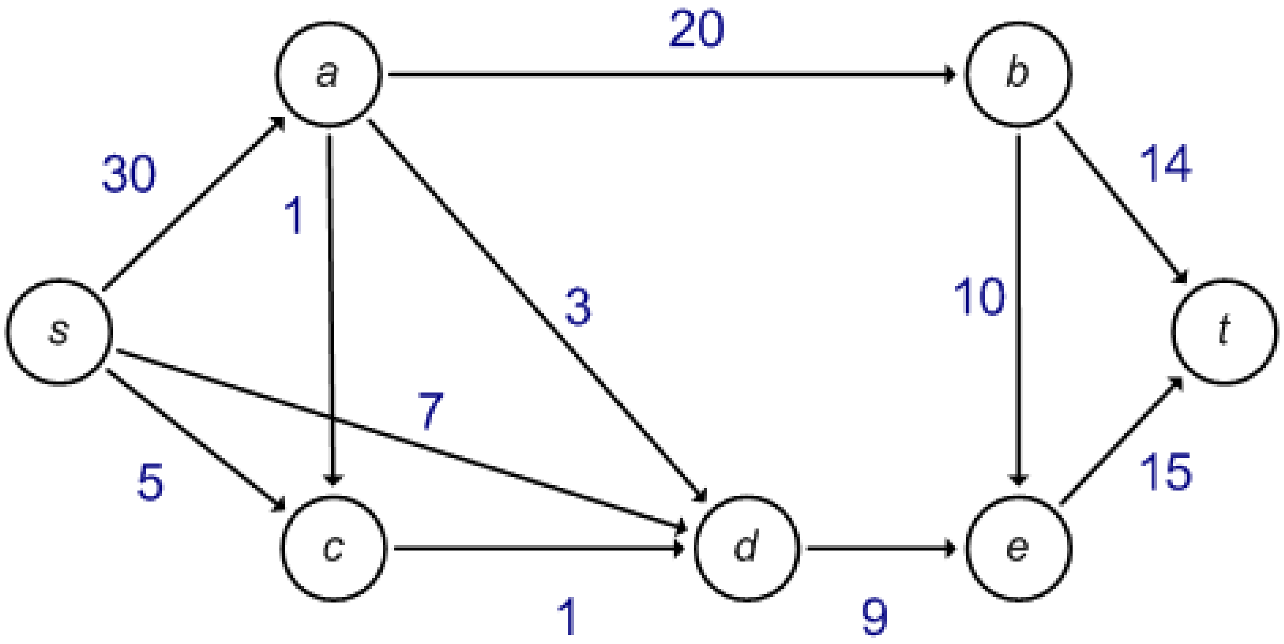
fim enquanto

retornar fluxo máximo e a matriz f

fim.

Método de Ford-Fulkerson

- Qual é o fluxo máximo para este rede?



Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.
  - 26.2 – O método de Ford-Fulkerson

- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;