Universidade Federal de Alfenas

Algoritmos em Grafos

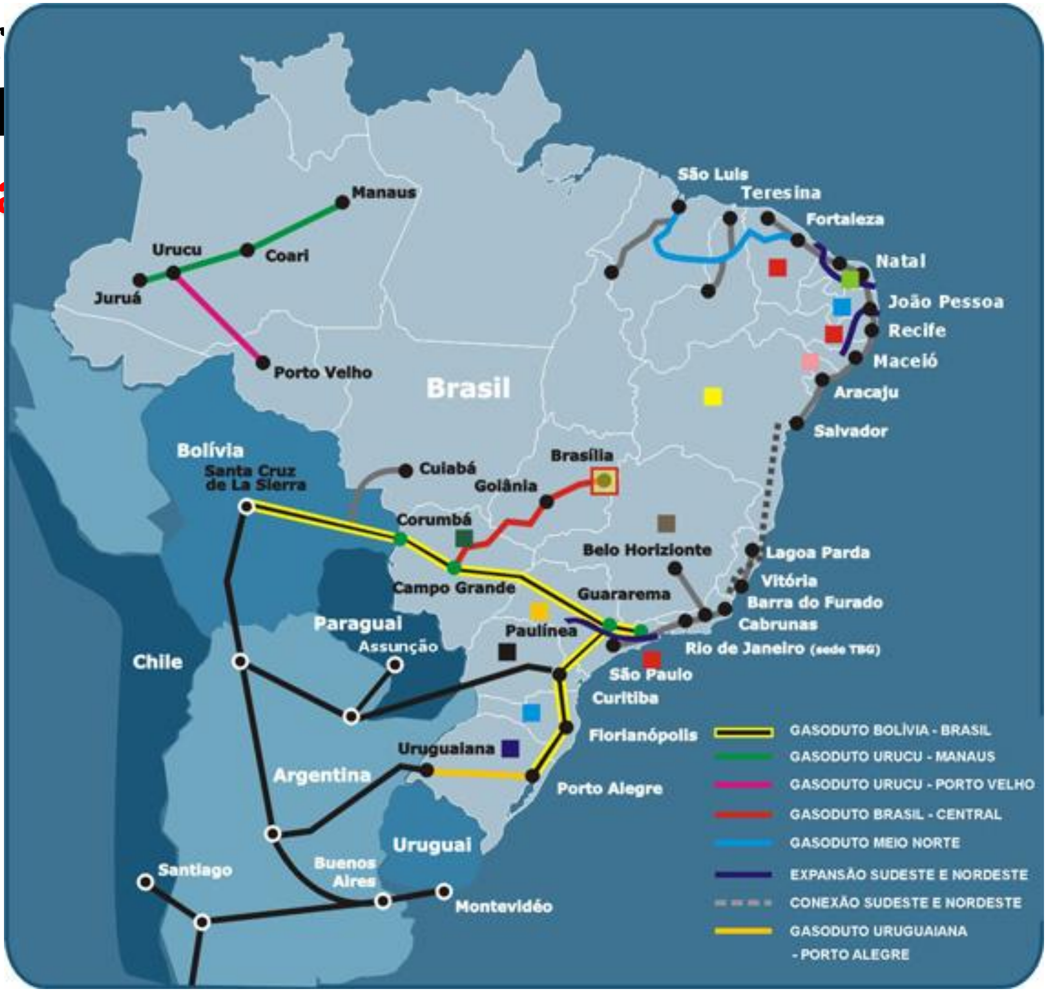
Aula 15 – Fluxo Máximo: Introdução

Prof. Humberto César Brandão de Oliveira
humberto@bcc.unifal-mg.edu.br

Fluxo Máximo

- “Podemos interpretar
‘fluxo em rede’ e usá-l
sobre fluxo de materia

- Exemplo de um gasoduto:



Fluxo Máximo

- Imagine um material percorrendo um sistema desde uma origem, onde o material é produzido, até um destino, onde ele é consumido;
- A origem produz em alguma taxa fixa, e o destino consome na mesma taxa;
  - Na prática, se isso não acontecer, ou existe:
    - Um ladrão de fluxo;
    - Ou o sistema é sobrecarregado.
      - Vazamento;
      - Apagão;
      - Etc...

Fluxo Máximo

- Podemos modelar:
  - Líquidos em tubos;
  - Peças em linhas de montagem;
  - Corrente por redes elétricas;
  - Dados por uma rede de comunicação;
  - Etc...

Fluxo máximo

- "No problema de Fluxo Máximo, desejamos calcular a maior taxa na qual o material pode ser enviado desde a origem até o destino sem violar restrições de capacidade".

- Esta informação é também importante para a produção/fabricação do material:
  - Se um produto for produzido além da capacidade de envio no grafo, será necessário armazená-lo.

Fluxo Máximo

- Aresta:
  - Pode ser vista como **um canal material**;
  - Possui uma **capacidade estabelecida**;
    - Capacidade máxima de vazão;
    - Ex.: 200kbps, 100m³ de água/s, etc.
- Vértices:
  - Representam:
    - as junções de canais
    - e origem e destino

    - Exemplos:
      - Roteadores;
      - Bifurcações elétricas;
      - Etc.

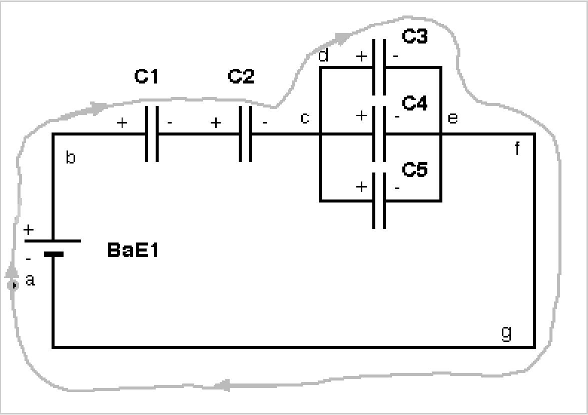
Fluxo Máximo

- Vértices:
  - É importante destacar que **o material flui** da origem para o destino **sem acumular em nenhum vértice** “interior” do grafo;

- No que isso acarretaria?
  - Em uma rede elétrica...
  - Em uma rede de esgoto...
  - Em uma rede de computadores...

Fluxo Máximo

- Chamamos esta propriedade do não armazenamento de conservação de fluxo;
- Idêntica à lei de corrente de Kirchhoff quando o material é a corrente elétrica;



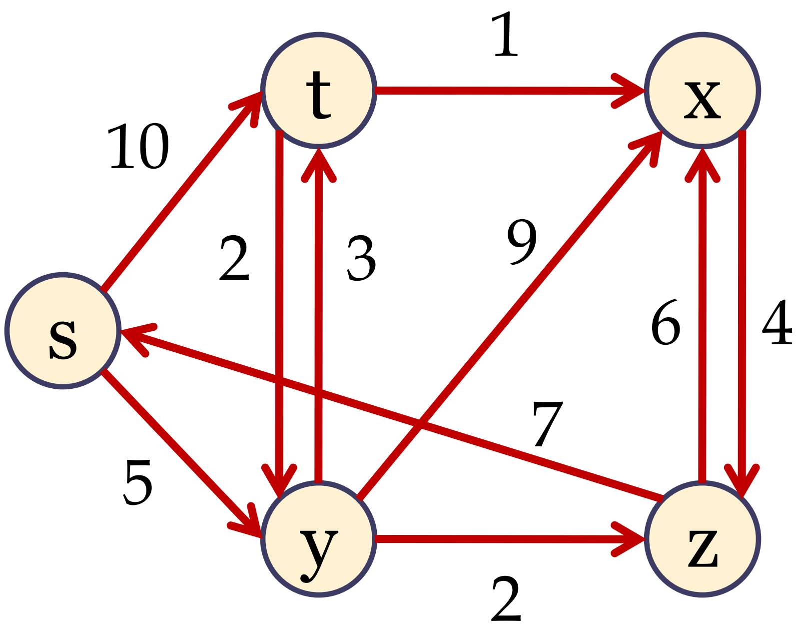
Fluxo Máximo

- No problema de fluxo máximo, o objetivo é enviar a maior quantidade de material possível sem sobrecarregar a rede;

- No caso de uma rede de computadores, um envio constante de informações além do que os roteadores podem suportar acarretaria na perda de pacotes depois da lotação dos seus respectivos *buffers*;

Imagine como implementar o algoritmo de Fluxo Máximo

- Veja a seguinte rede com as capacidades dos arcos:



Fluxo Máximo

- Apesar do problema parecer complexo, existem algoritmos eficientes para resolvê-lo:
  - Ford-Fulkerson;
  - Edmonds-Karp;
  - Push-Relabel;

Fluxo Máximo
Formalizando...

- Um fluxo em rede $G = (V,A)$ é um grafo orientado em que cada aresta $(u,v) \in A$ tem uma capacidade não negativa;
  - $c(u,v) >= 0$;
- Se $(u,v) \notin A$ supomos que $c(u,v) = 0$;

Fluxo Máximo
Formalizando...

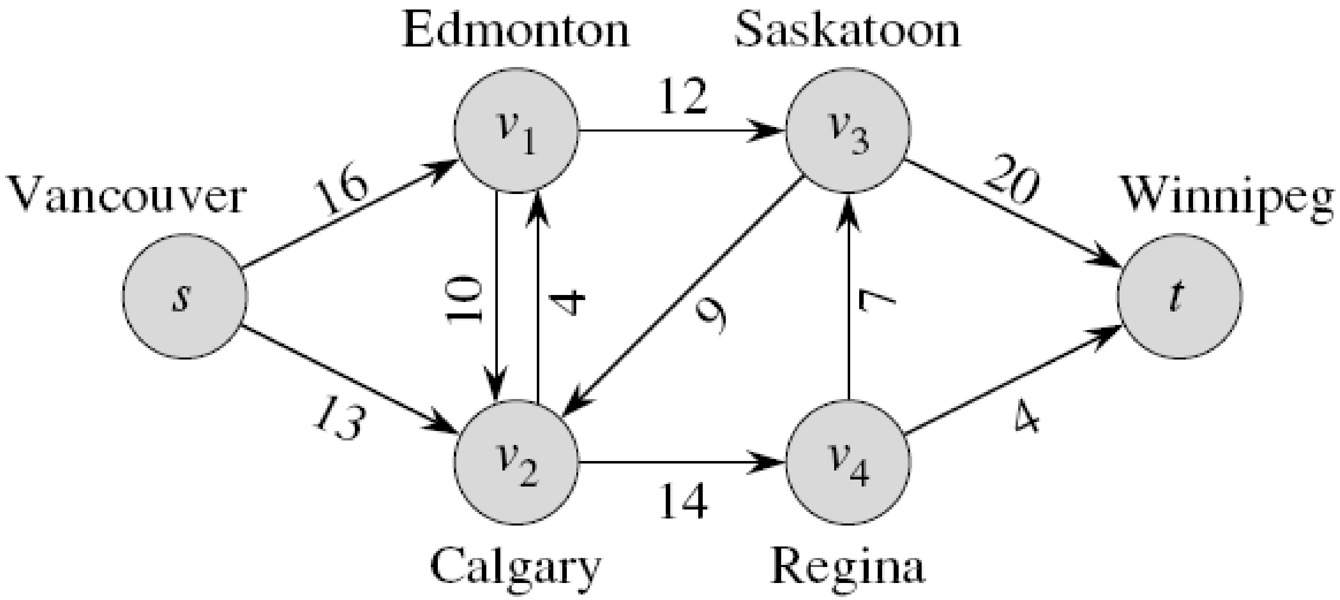
- Dois vértices do grafo devem estar em evidência:
  - Origem *s (source)*;
  - Destino *t (sink)*;

- Obviamente, **existe** ao menos um caminho de *s* até *t* no grafo;

- Devemos supor também que para cada vértice *v* do grafo, existe ao menos um caminho de *s* até *t* passando por *v*.

Fluxo Máximo
Formalizando...

- Exemplo de grafo de fluxo:



Fluxo Máximo
Formalizando...

- Um fluxo em G é uma função real

$$f : V \times V \to \Re$$

- Que satisfaz três propriedades:
  - Restrição de capacidade;
  - Anti-simetria oblíqua;
  - Conservação de fluxo;

Fluxo Máximo
Formalizando...

- Restrição de capacidade:

$$\forall \ u, v \in V \ \text{ exigimos } \ f(u,v) \leq c(u,v)$$

- Nenhuma aresta pode transportar mais que sua capacidade;

- Impactos já discutidos anteriormente...

Fluxo Máximo
Formalizando...

- Anti-simetria oblíqua:

$$\forall \; u, v \in V \;\; \text{exigimos} \;\; f(u,v) \leq -f(v,u)$$

- Se existe fluxo de a para b, então existe um fluxo inverso de b para a.

Fluxo Máximo
Formalizando...

- Conservação de fluxo:

$$\forall \ u \in V - \{s, t\} \ \text{exigimos} \ \sum_{v \in V} f(u, v) = 0$$

- Isso garante:
  - Que não existe acumulo nos nós interiores;
  - Que os nós interiores não produzem o item transportado;
  - Eles apenas repassam... (roteamento)

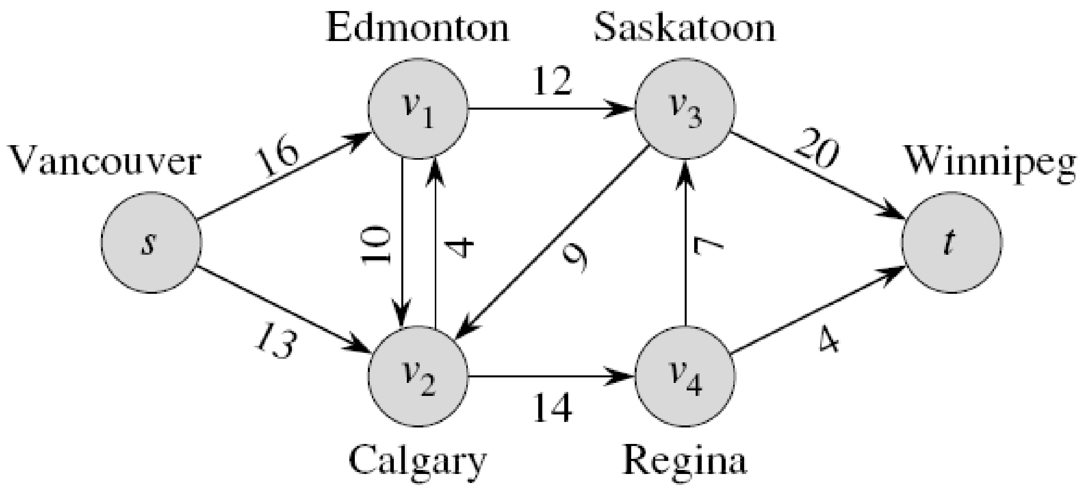
Fluxo Máximo

- Fluxo total positivo:
  - Representa a quantidade de material que chega até um nó do grafo.

$$\mathrm{ftp}_{\mathrm{v}} = \sum_{\substack{u \in V \\ f(u,v) > 0}} f(u,v)$$

Fluxo Máximo

- Exemplo:
  - A empresa fabrica discos em *Vancouver*;
  - Seu depósito é em *Winnipeg*;
  - Outra empresa aluga espaço em seus caminhões para transporte;

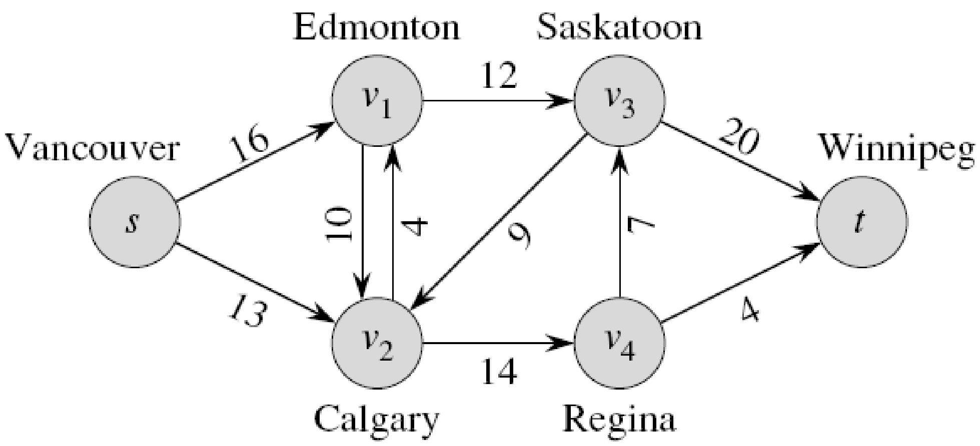


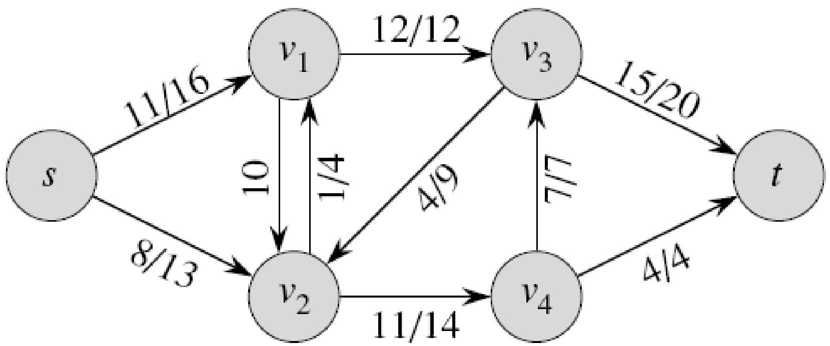
Fluxo Máximo

- Exemplo:
  - Não faz sentido nenhum produzir mais discos do que podemos enviar ao *sink* (depósito), pois não temos depósito na fábrica;
  - Não podemos enviar muitos discos pelas primeiras empresas de transporte (próximas a fábrica), pois se as outras não possuem a mesma vazão, pagaremos caro para armazenar nossos discos nas cidades intermediárias.

Fluxo Máximo

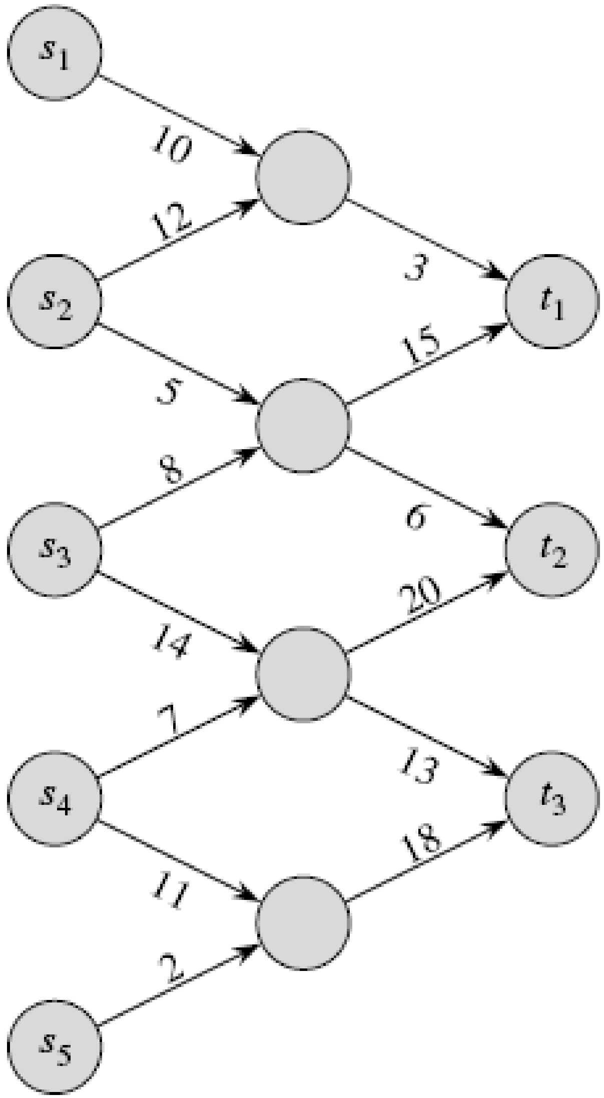
- Solução do exemplo:





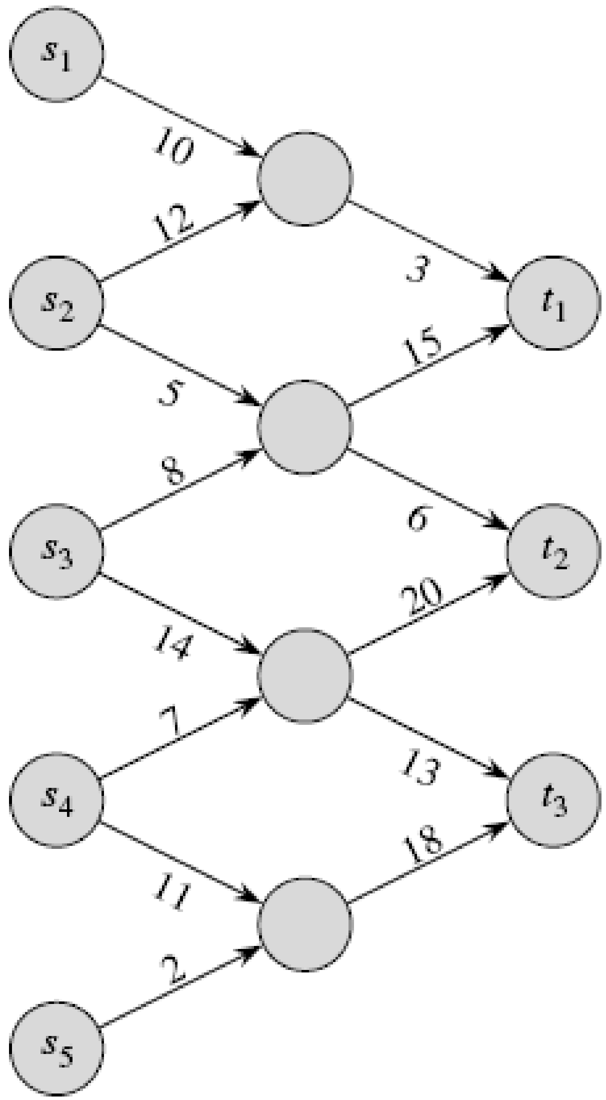
Fluxo Máximo

- Redes com várias origens e vários destinos
  - Empresas podem ter várias fábricas e vários depósitos;



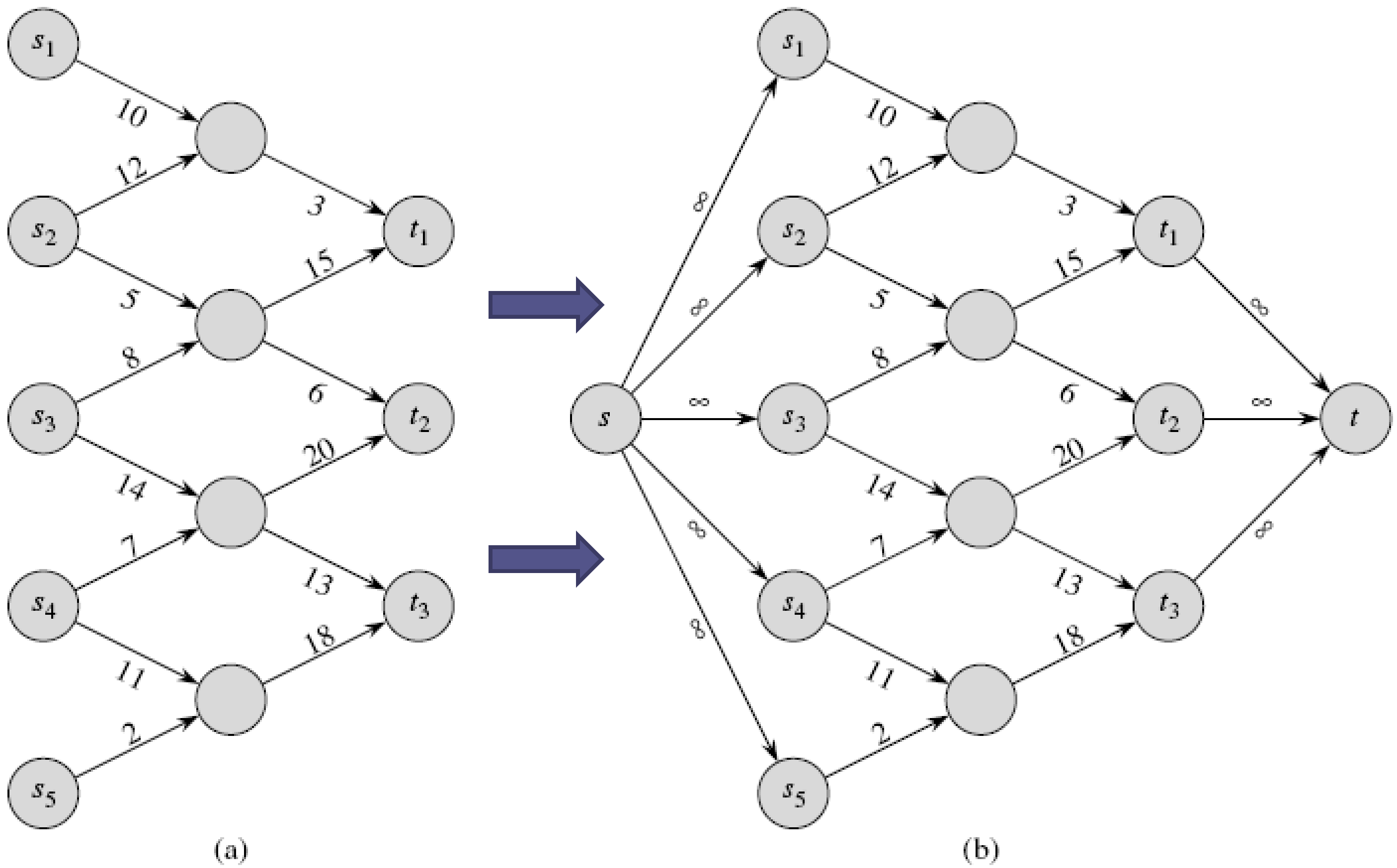
Fluxo Máximo

- Redes com várias origens e vários destinos
  - O problema é mais complexo aparentemente, mas…



Fluxo Máximo

- Redes com várias origens e vários destinos



Redes Residuais

Fluxo Máximo

Redes Residuais

- A rede residual consiste em arestas que podem admitir mais fluxo.
- Seja f um fluxo em G, e considere um par de vértices $u,v \in V$:
  - A quantidade de fluxo adicional que podemos "empurrar" de u para v antes de exceder a capacidade $c(u,v)$ é a capacidade residual.

Fluxo Máximo
Redes Residuais

- Capacidade Residual (c_f):

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

- Exemplo:
  - Capacidade de *a* para *b* é de 10Kbps;
  - Estamos utilizando 2Kbps;
  - Então, a capacidade residual é 8Kbps...

Fluxo Máximo
Redes Residuais

- Quando $f(u,v)$ é negativo...
  - Capacidade de *a* para *b* é de 10 litros por segundo;
  - b está enviando para a 2 litros por segundo;
  - Então, a capacidade residual é 12 litros por segundo.

  - Parar de receber os 2 lps, e ainda enviar mais 10 lps.

Fluxo Máximo
Redes Residuais

- Definição formal:
  - Rede residual (G_f):

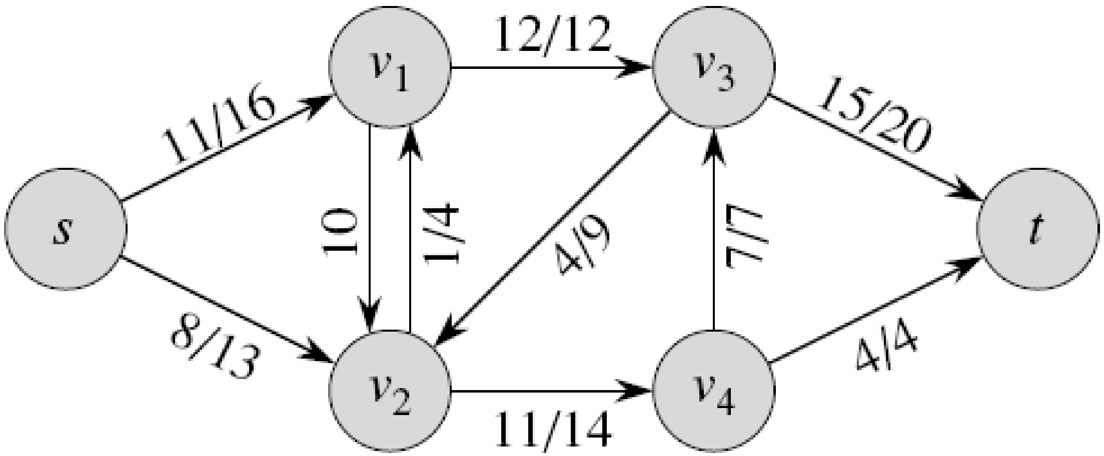
$$G_f = (V, A_f)$$

Arestas residuais

$$A_f = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0\}$$

Fluxo Máximo
Redes Residuais

- Calcule a rede residual:



$$G_f = (V, A_f)$$

$$A_f = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0\}$$

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

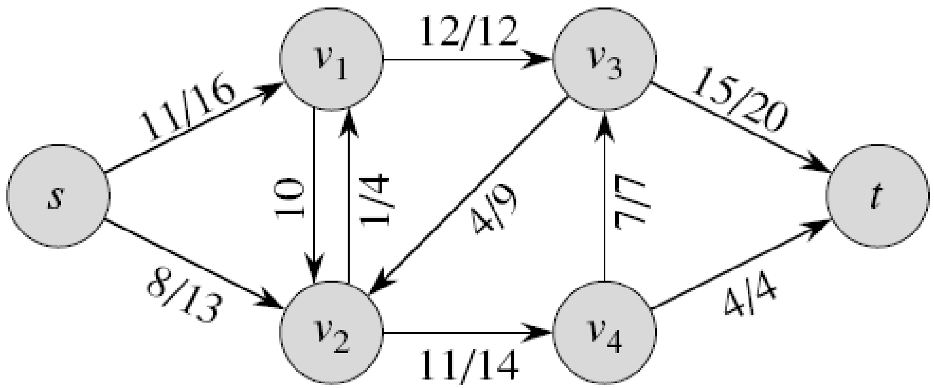
Fluxo Máximo

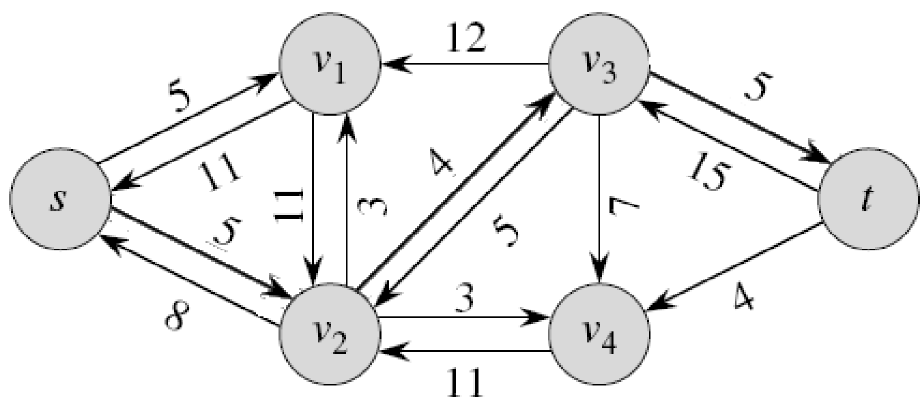
Redes Residuais

$$G_f = (V, A_f)$$

$$A_f = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0\}$$

- Rede residual:



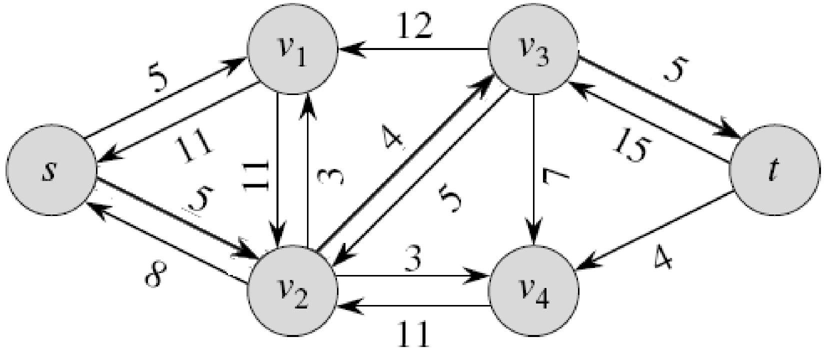


Fluxo Máximo

Redes Residuais

$$G_f = (V, A_f)$$

- Rede residual: $A_f = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0\}$
  - Olhando a rede residual, existe caminho da origem para o destino?

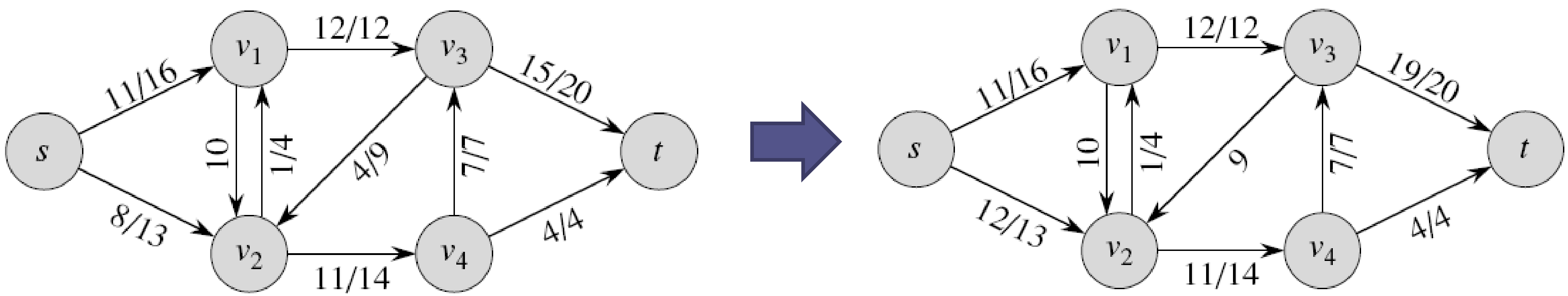


  - Se existe, é possível aumentar a quantidade enviada no grafo original...

Fluxo Máximo

Redes Residuais

- Rede residual:



Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.
  - 26 – Fluxo Máximo
    - 26.1 Fluxo em Redes
- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;