

Universidade Federal de Alfenas

Algoritmos em Grafos

Aula 14 – Caminho Mínimo: Algoritmo de Dijkstra

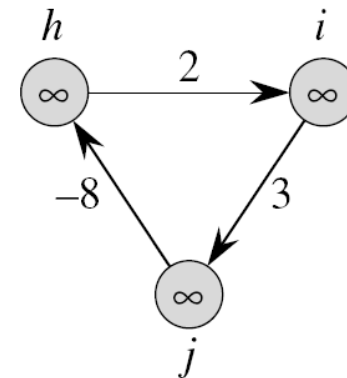
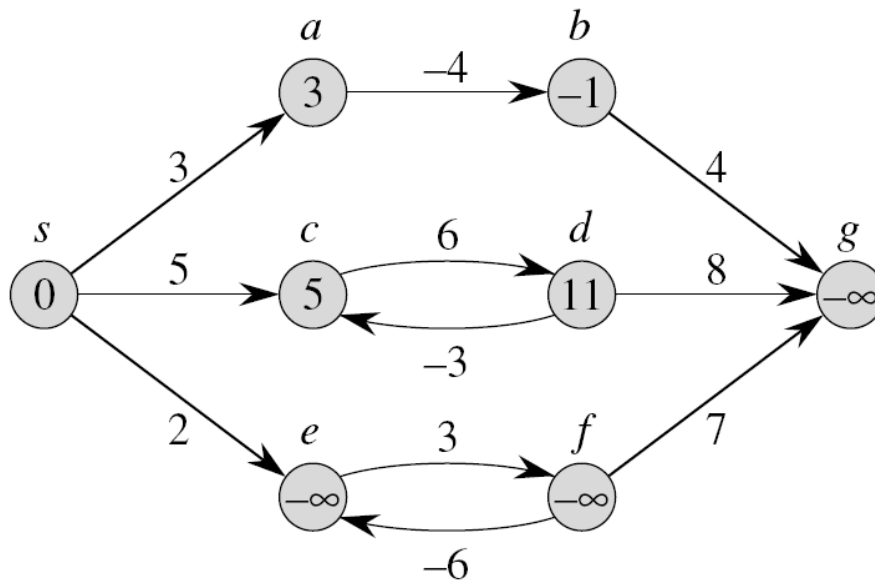
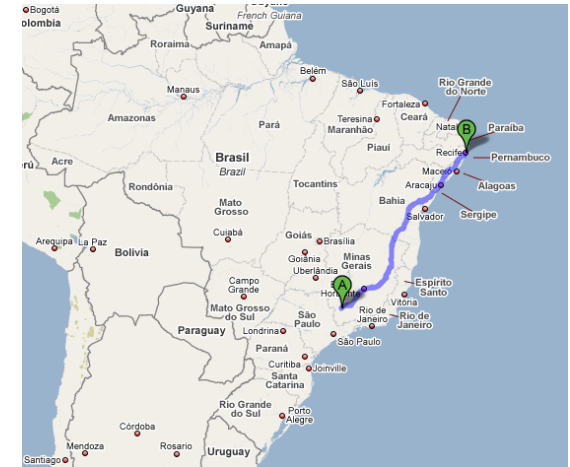
Prof. Humberto César Brandão de Oliveira

humberto@bcc.unifal-mg.edu.br



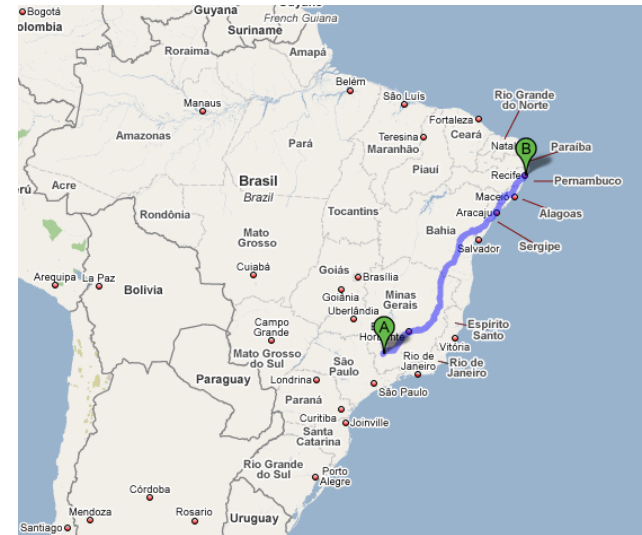
Últimas aulas...

- Caminho mais curto (mínimo) de um para todos os outros vértices em grafos cíclicos (ou acíclicos)...
- Os grafos podem ter ciclos de **peso negativo**...
 - Algoritmo de *Bellman-Ford*.

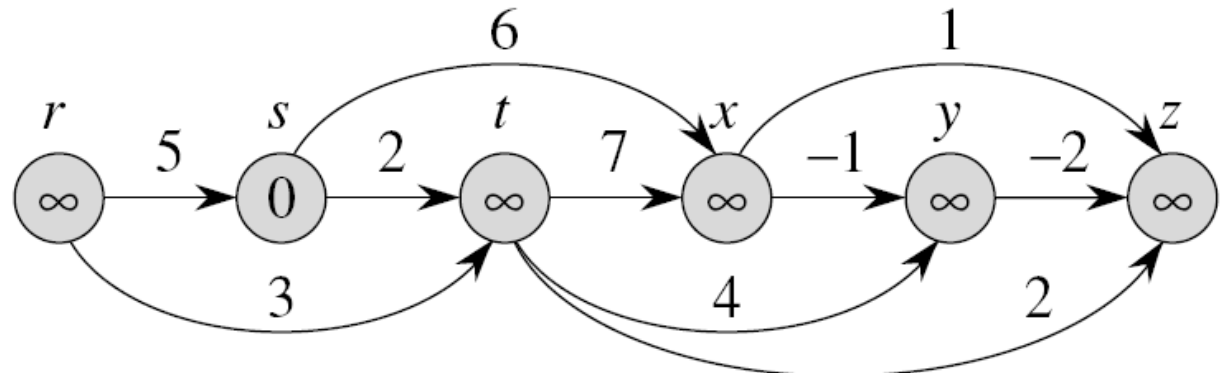


Últimas aulas...

- Quando os grafos são acíclicos, podemos otimizar o processo para encontrar o caminho mais curto de um vértice para todos os outros.



- O algoritmo utiliza a ordenação topológica garantir a otimalidade do método.



Algoritmo de Dijkstra

- Dijkstra:
 - Resolve o problema do caminho mais curto de origem única em:
 - um grafo direcionado, ponderado $G=(V,A)$;
 - Sendo que todos os pesos das arestas são não negativos;
 - O grafo pode conter ciclos.

Algoritmo de Dijkstra

- É o algoritmo de caminho mais curto mais aplicado para **problemas rodoviários** porque
 - aceita **ciclos** (comum nas estradas) e
 - **não possui arestas de peso negativo** (não existe distancia negativa entre dois pontos quaisquer em um mapa).
- *Como não possui arestas negativas, conseqüentemente não possui ciclos de peso negativo.*

Algoritmo de Dijkstra

- Comentário:
- O algoritmo de Dijkstra é um algoritmo **GULOSO**;
- Assim como outros métodos vistos na disciplina, apesar de ser guloso, ele é **exato**:
 - encontra sempre o menor caminho da raiz para todos os nós do grafo.

Algoritmo de Dijkstra

- O **algoritmo** basicamente **trabalha com dois tipos de vértices**.
 - Aqueles que já é conhecida a menor distância para a raiz, e
 - Aqueles que a distância conhecida ainda é provisória (sem garantia de otimalidade).

Algoritmo de Dijkstra

- Estruturas utilizadas:

$\pi[u]$ \rightarrow pai do vértice u

$d[u]$ \rightarrow Distância da origem até u

Q \rightarrow nós com distância provisória

S \rightarrow nós com distância definitiva

Algoritmo de Dijkstra

- Relembrando dois métodos básicos utilizados:

INICIALIZA($G = (V, A), s$)

para cada $v \in V$

$d[v] = \infty$

$\pi[v] = \text{NULL}$

fim para

$d[s] = 0$

fim

RELAXA(u, v, w)

se $d[v] > (d[u] + w(u, v))$ *então*

$d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

$\pi[v] = u$

fim se

fim

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minimo}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

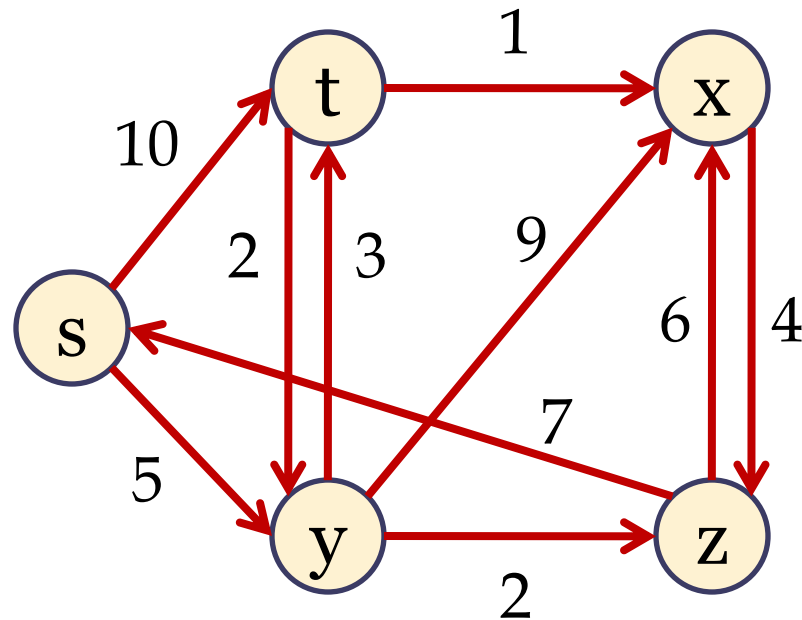
fim para

fim enquanto

fim

Algoritmo de Dijkstra

- Considere o grafo:



Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

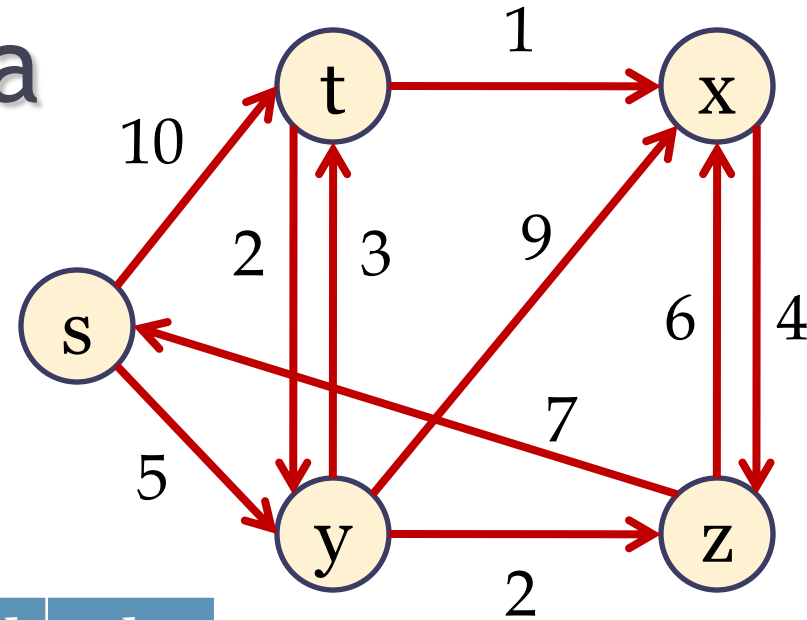
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

$\text{relaxa}(u, v, w)$

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	

vértice	s	t	x	y	z
d					
π					
Q					
S					

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

➔ *INICIALIZA*(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

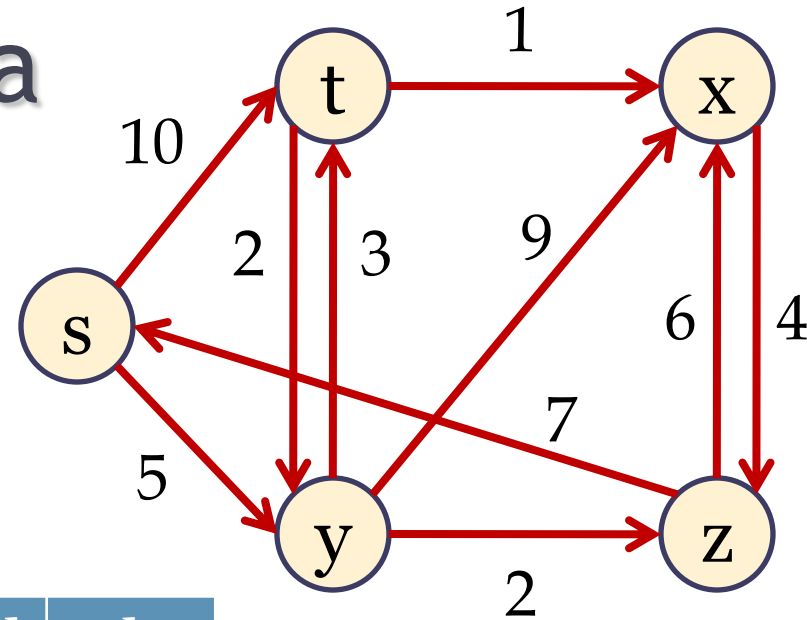
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	

vértice	s	t	x	y	z
d					
π					
Q					
S					

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

➔ *INICIALIZA*(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

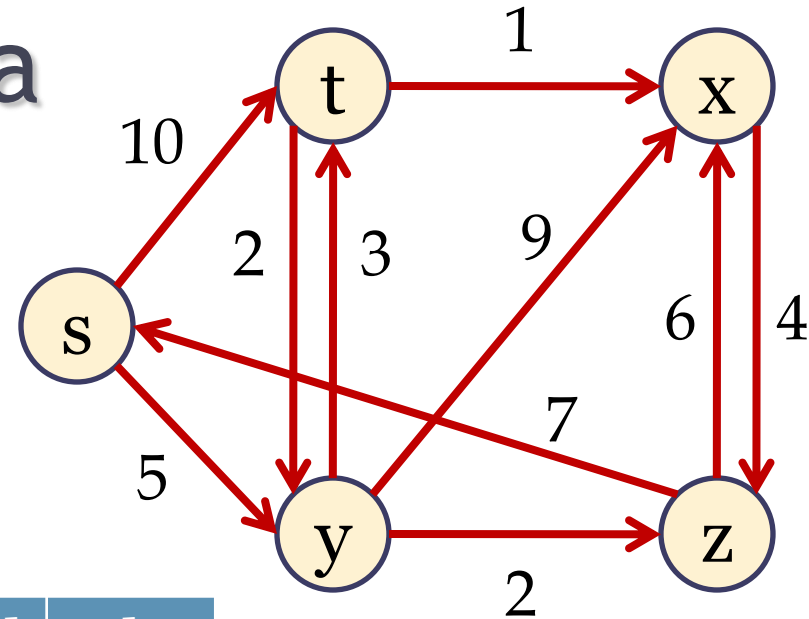
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

$\text{relaxa}(u, v, w)$

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q					
S					

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

→ $S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

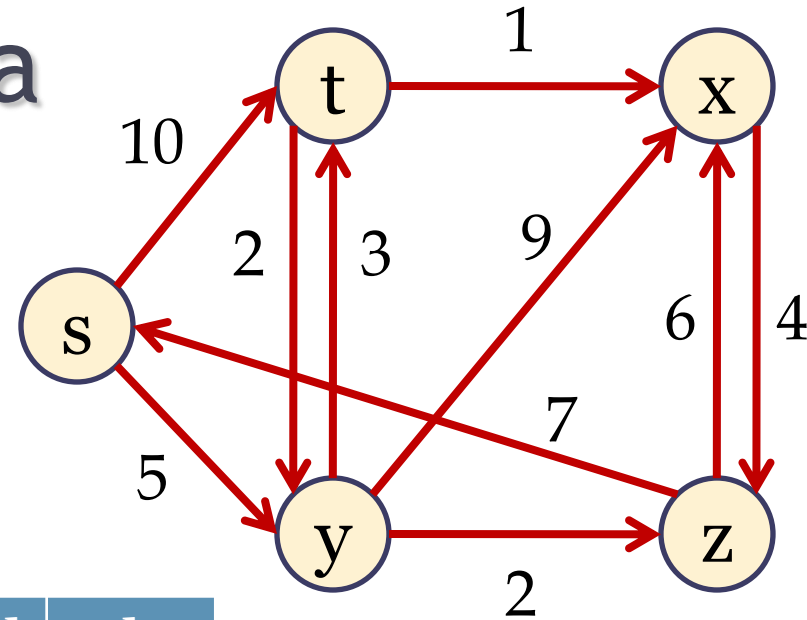
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q					
S					

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

→ $S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

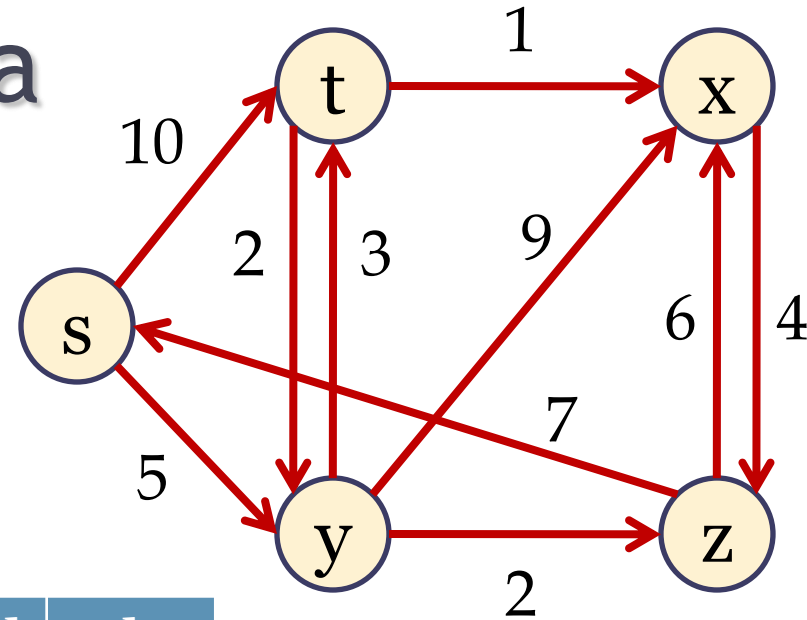
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q					
S	---	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$\rightarrow Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

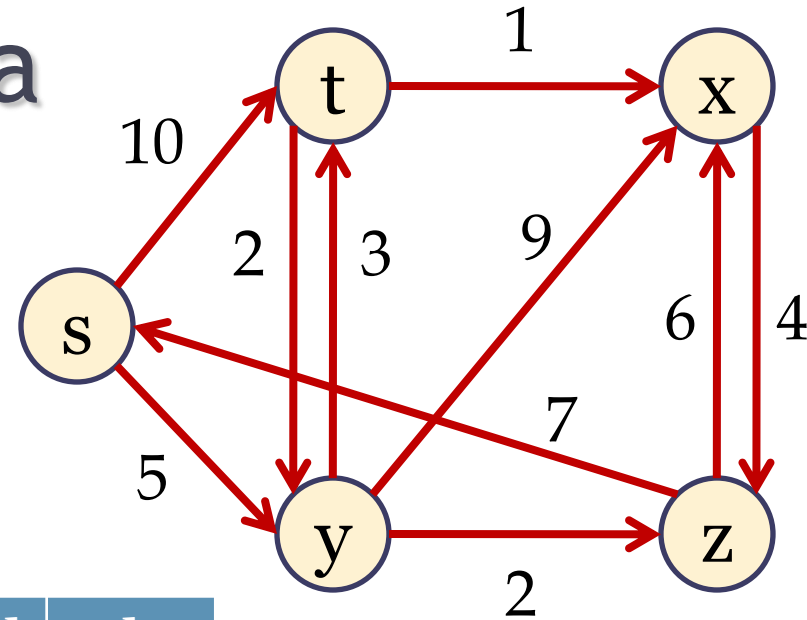
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q					
S	---	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$\rightarrow Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

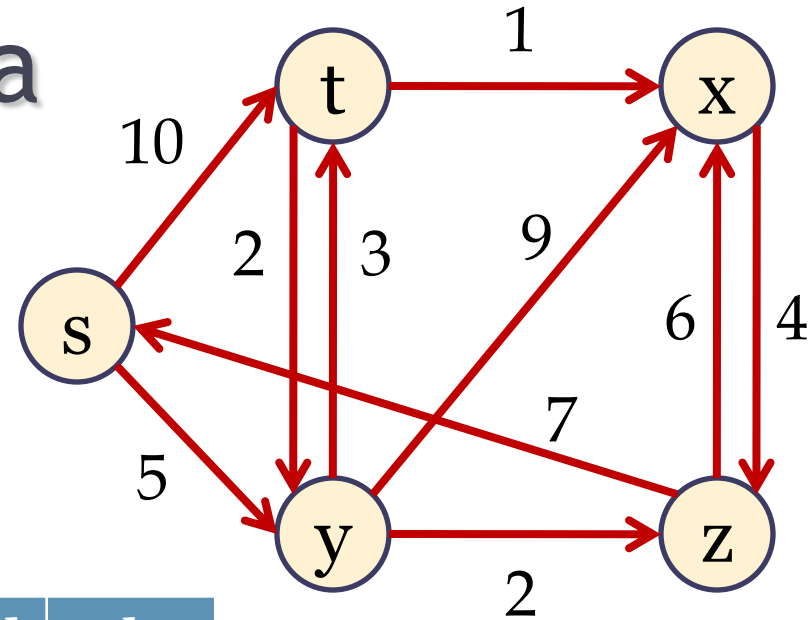
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q	X	X	X	X	X
S	---	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

➔ *Enquanto* $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

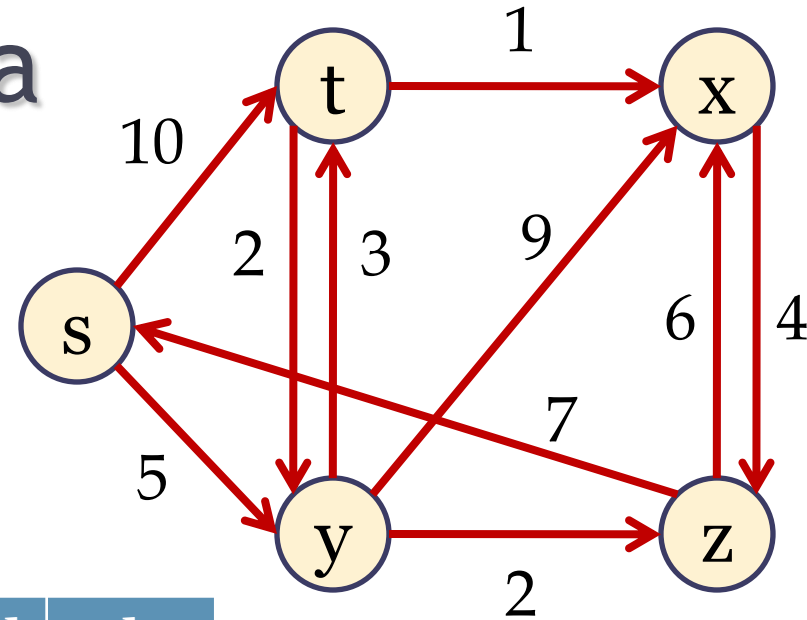
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q	X	X	X	X	X
S	---	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

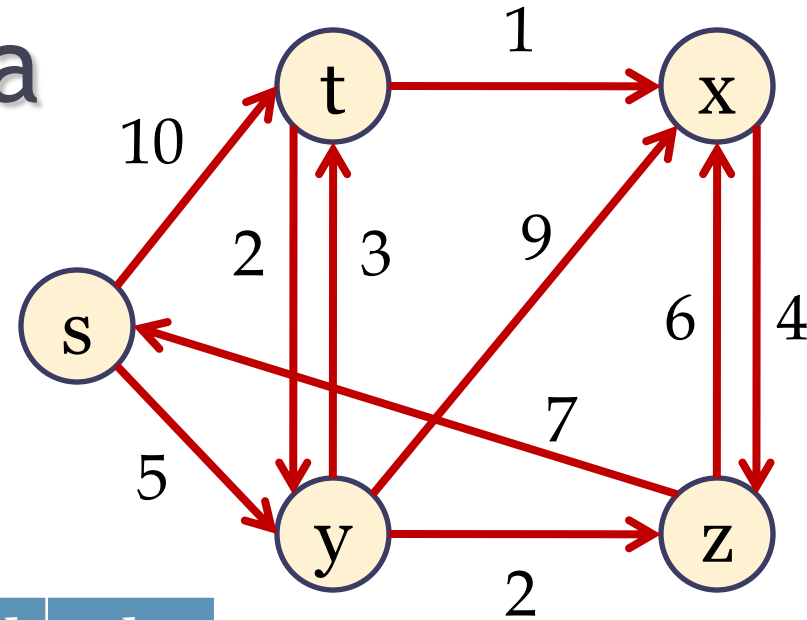
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q	X	X	X	X	X
S	---	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

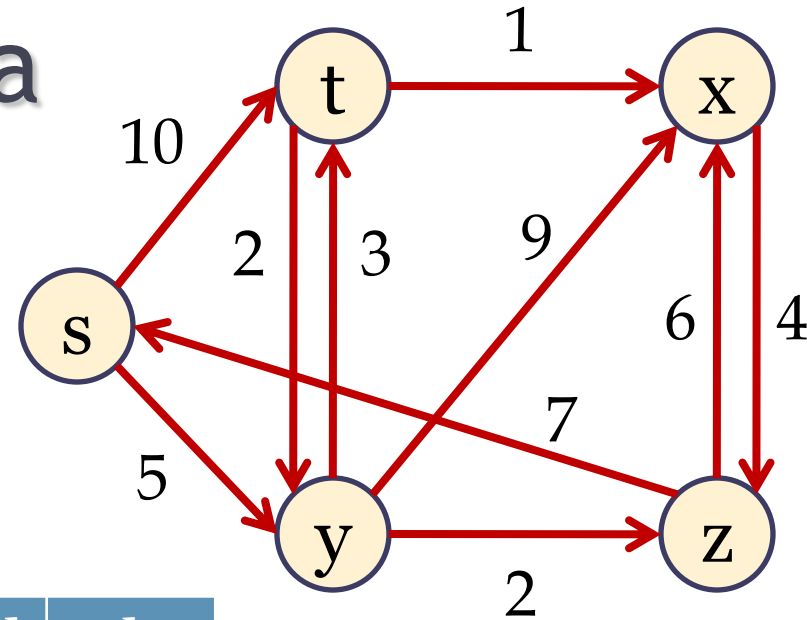
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	s

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q	---	X	X	X	X
S	---	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

➔ $S \leftarrow S \cup \{u\}$

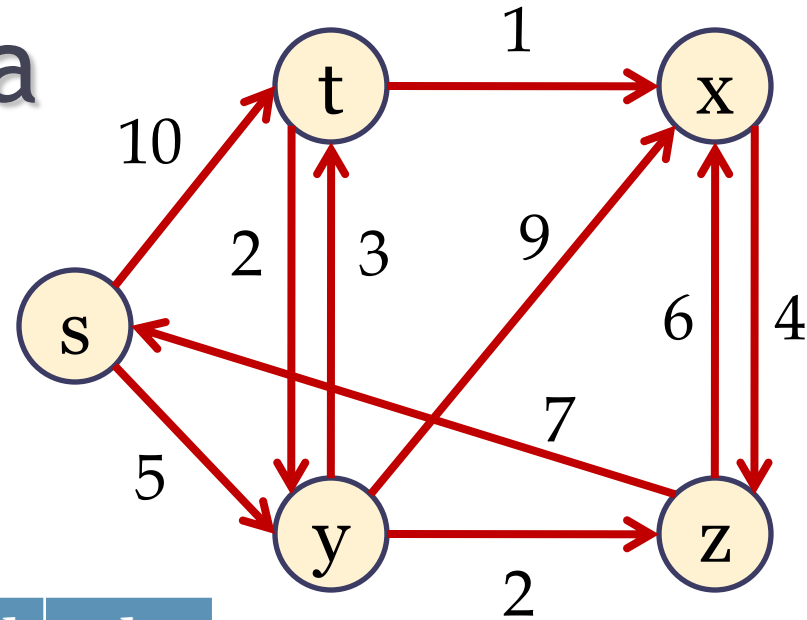
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	s

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q	---	X	X	X	X
S	---	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

➔ $S \leftarrow S \cup \{u\}$

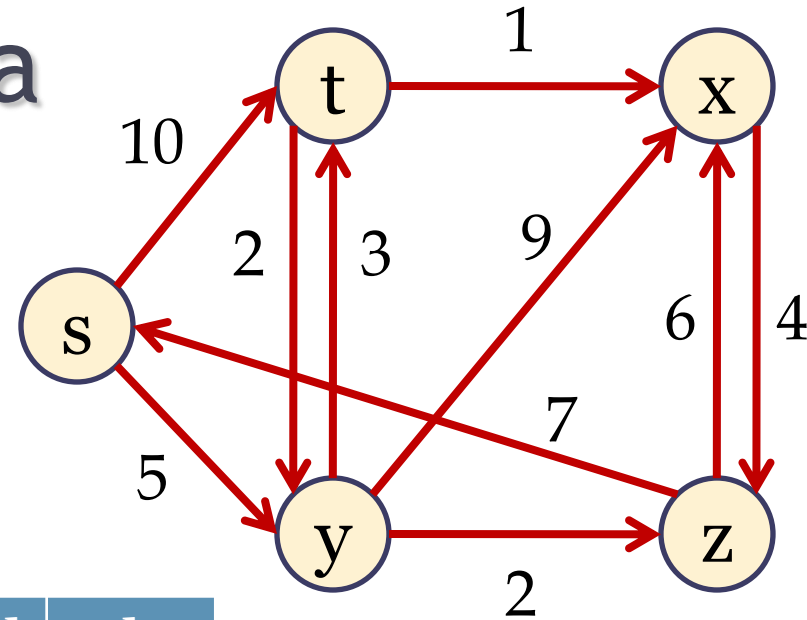
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	s

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q	---	X	X	X	X
S	X	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

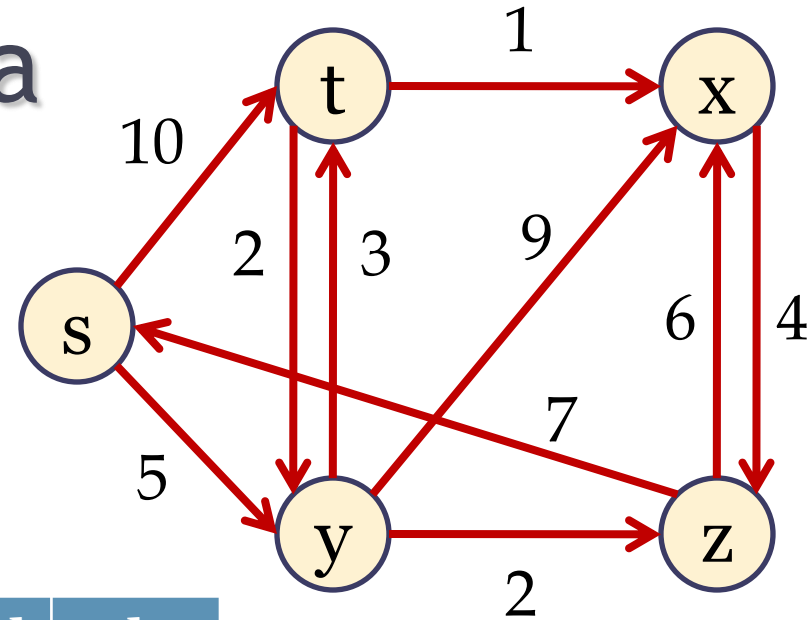
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	s

vértice	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
Q	---	X	X	X	X
S	X	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

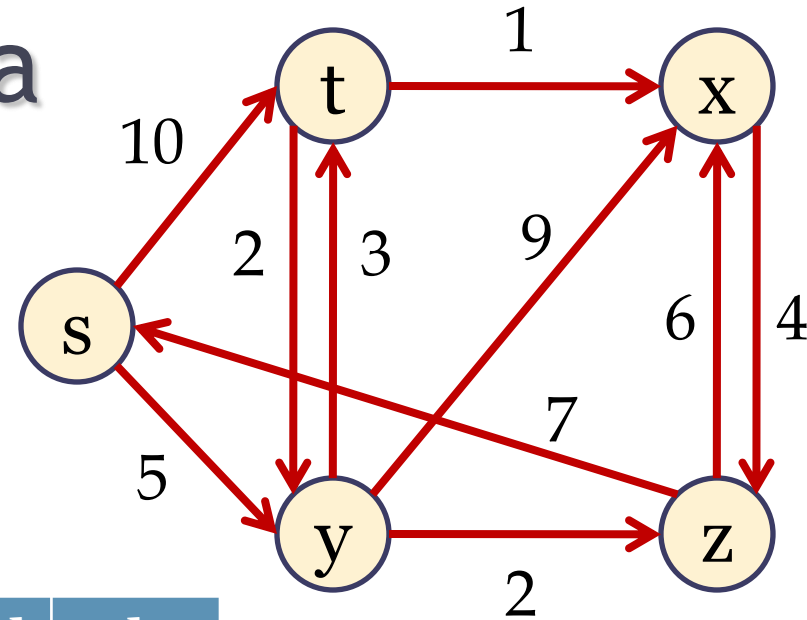
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	s

vértice	s	t	x	y	z
d	0	10	∞	5	∞
π	NULL	s	NULL	s	NULL
Q	---	X	X	X	X
S	X	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

→ Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

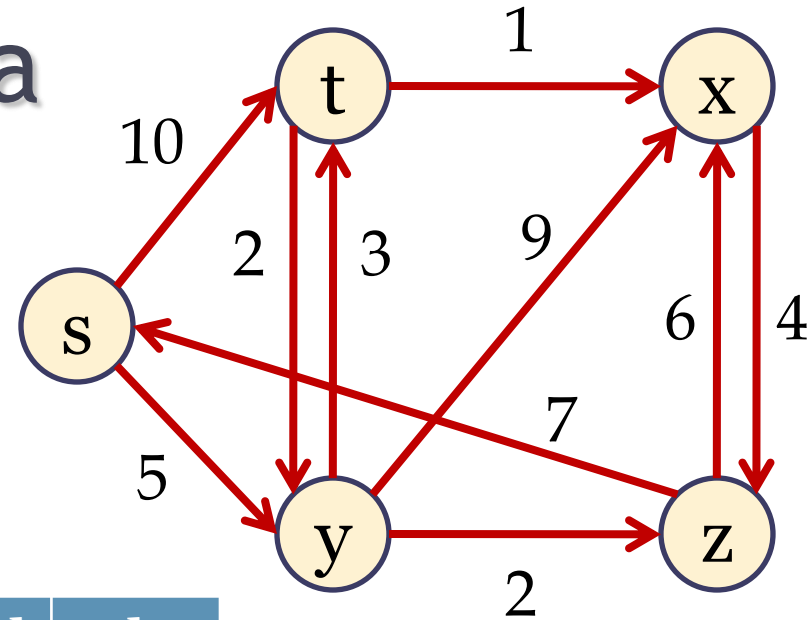
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	s

vértice	s	t	x	y	z
d	0	10	∞	5	∞
π	NULL	s	NULL	s	NULL
Q	---	X	X	X	X
S	X	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

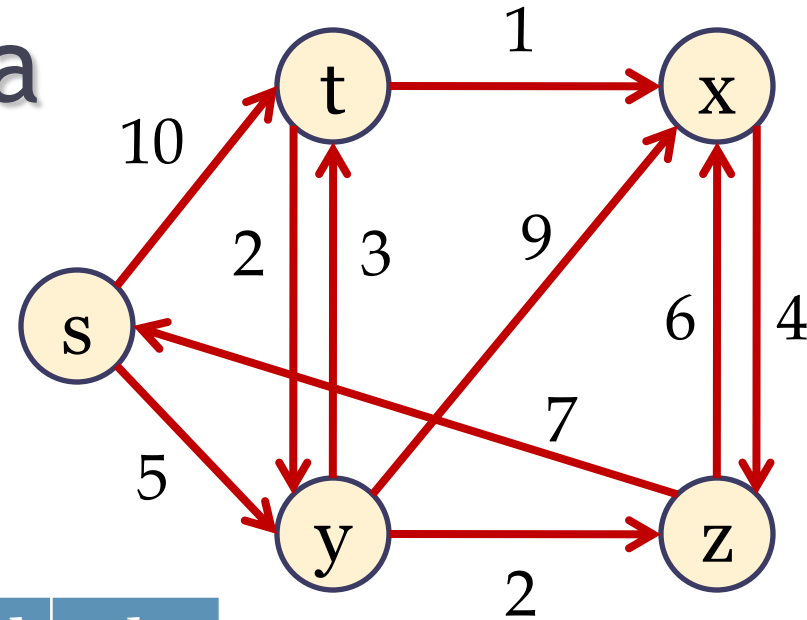
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	s

vértice	s	t	x	y	z
d	0	10	∞	5	∞
π	NULL	s	NULL	s	NULL
Q	---	X	X	X	X
S	X	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

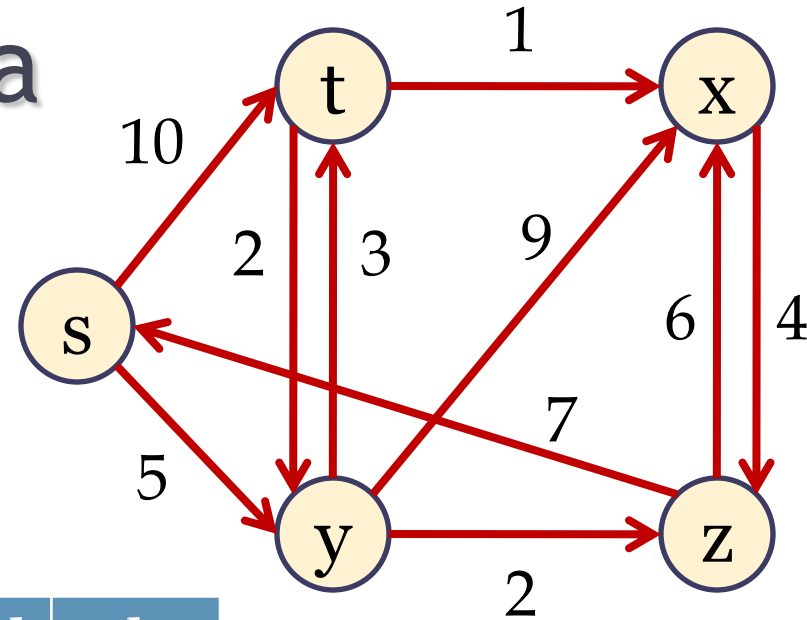
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	s

vértice	s	t	x	y	z
d	0	10	∞	5	∞
π	NULL	s	NULL	s	NULL
Q	---	X	X	X	X
S	X	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

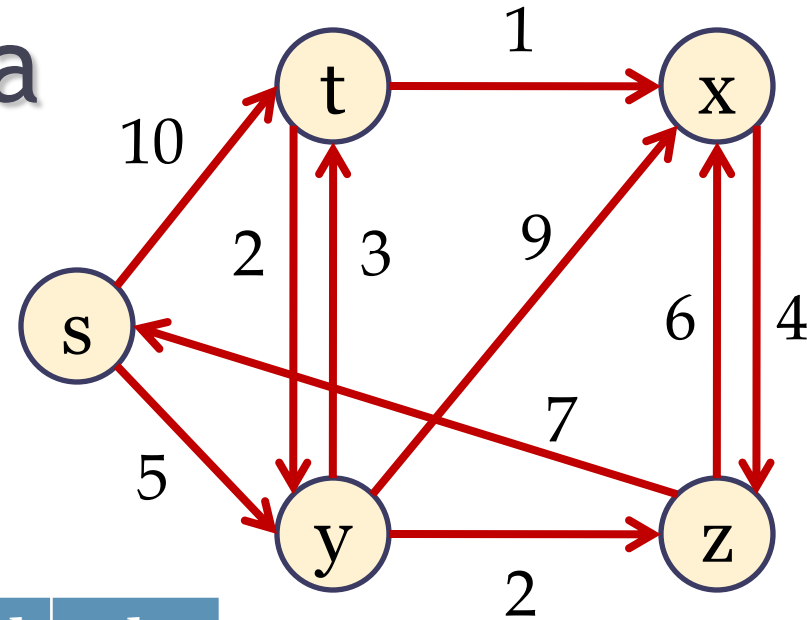
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	y

vértice	s	t	x	y	z
d	0	10	∞	5	∞
π	NULL	s	NULL	s	NULL
Q	---	X	X	---	X
S	X	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

➔ $S \leftarrow S \cup \{u\}$

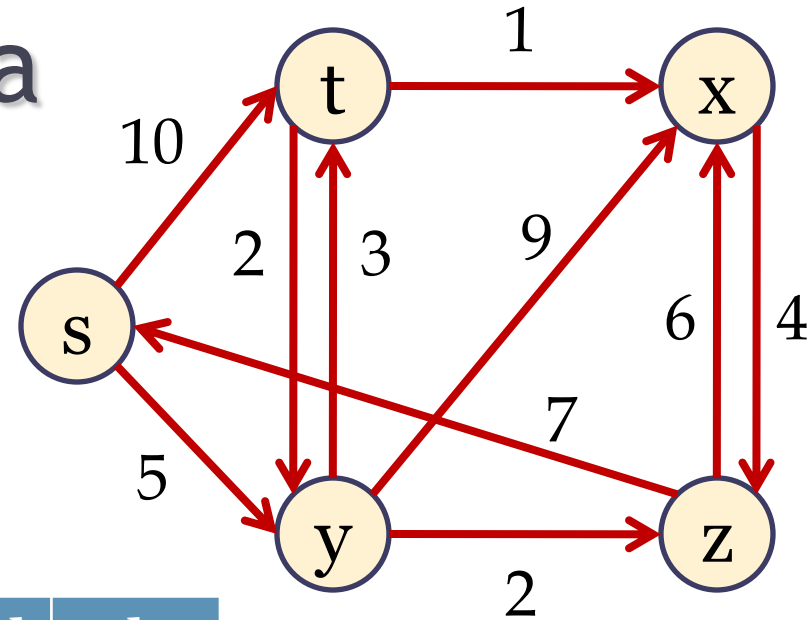
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	y

vértice	s	t	x	y	z
d	0	10	∞	5	∞
π	NULL	s	NULL	s	NULL
Q	---	X	X	---	X
S	X	---	---	---	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

➔ $S \leftarrow S \cup \{u\}$

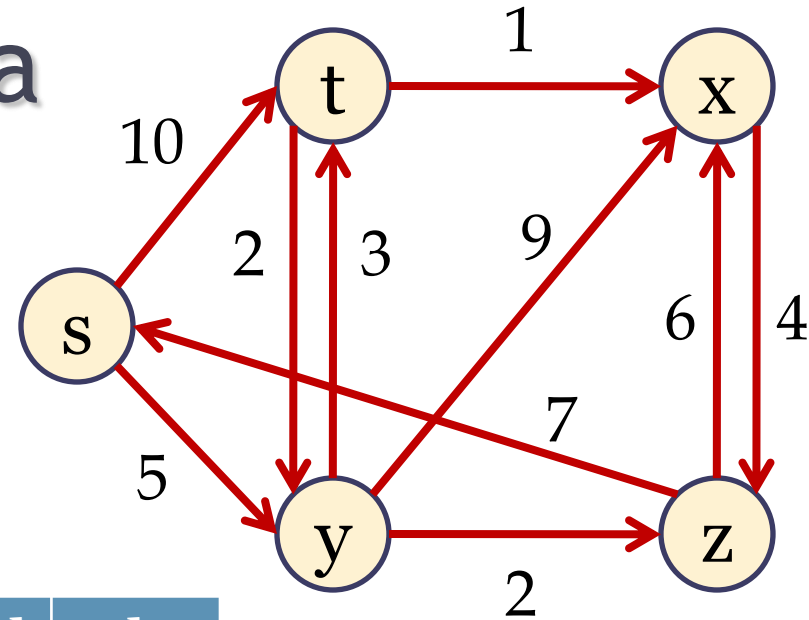
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	y

vértice	s	t	x	y	z
d	0	10	∞	5	∞
π	NULL	s	NULL	s	NULL
Q	---	X	X	---	X
S	X	---	---	X	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

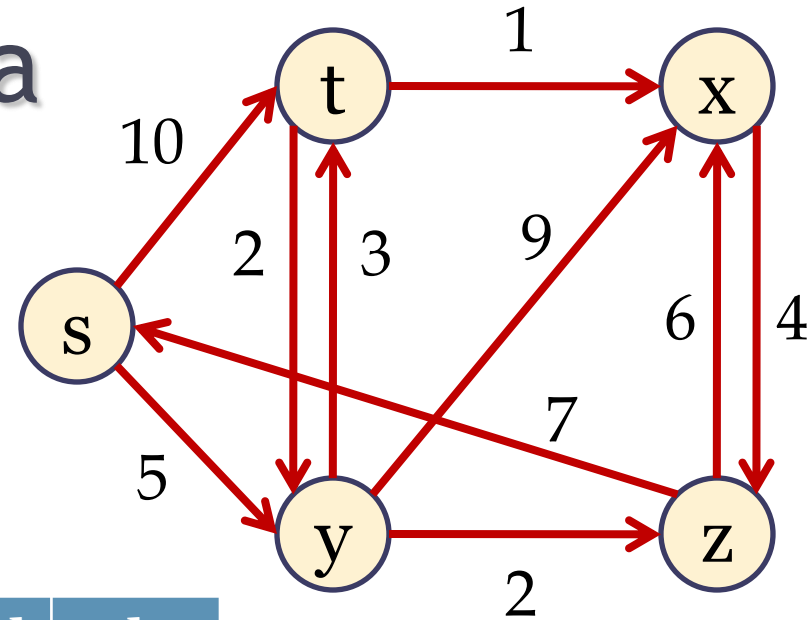
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	y

vértice	s	t	x	y	z
d	0	10	∞	5	∞
π	NULL	s	NULL	s	NULL
Q	---	X	X	---	X
S	X	---	---	X	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

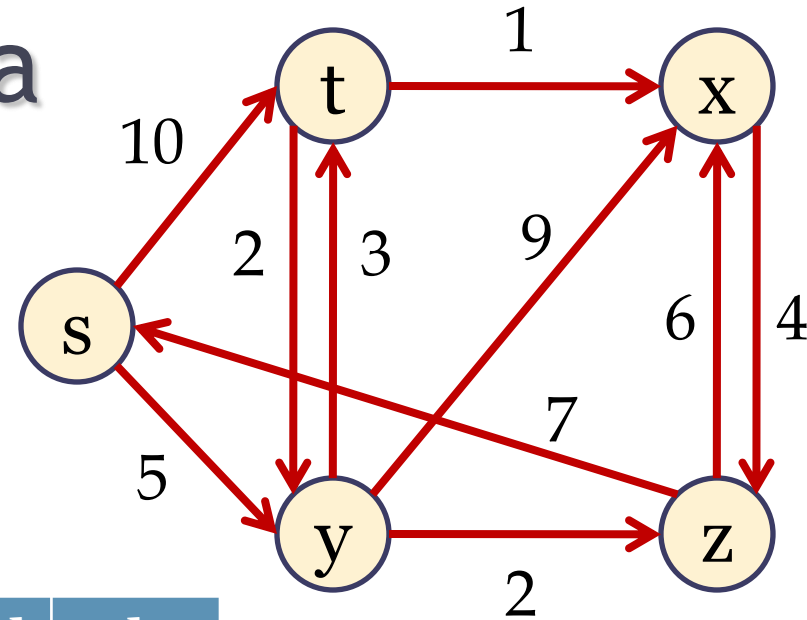
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	y

vértice	s	t	x	y	z
d	0	10	∞	5	∞
π	NULL	s	NULL	s	NULL
Q	---	X	X	---	X
S	X	---	---	X	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

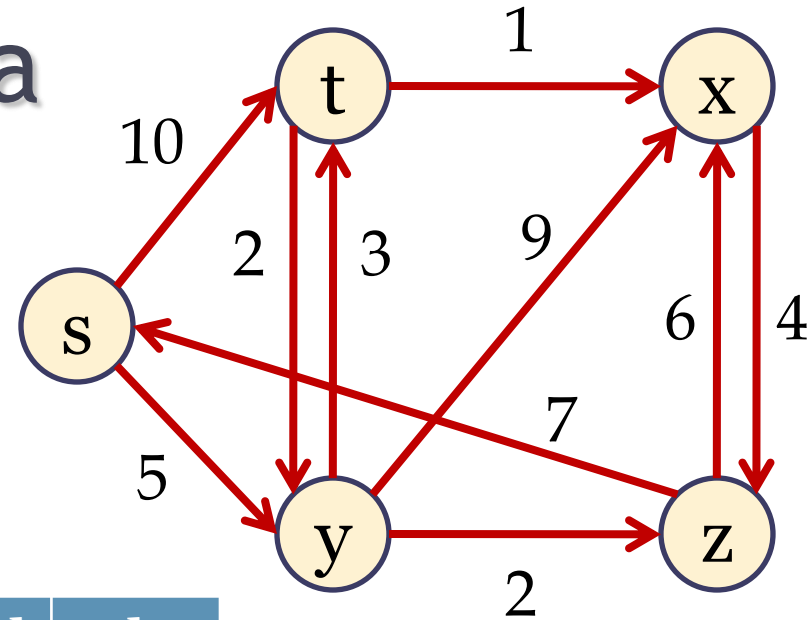
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	y

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	14	5	7
π	NULL	y	y	s	y
Q	---	X	X	---	X
S	X	---	---	X	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

→ Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

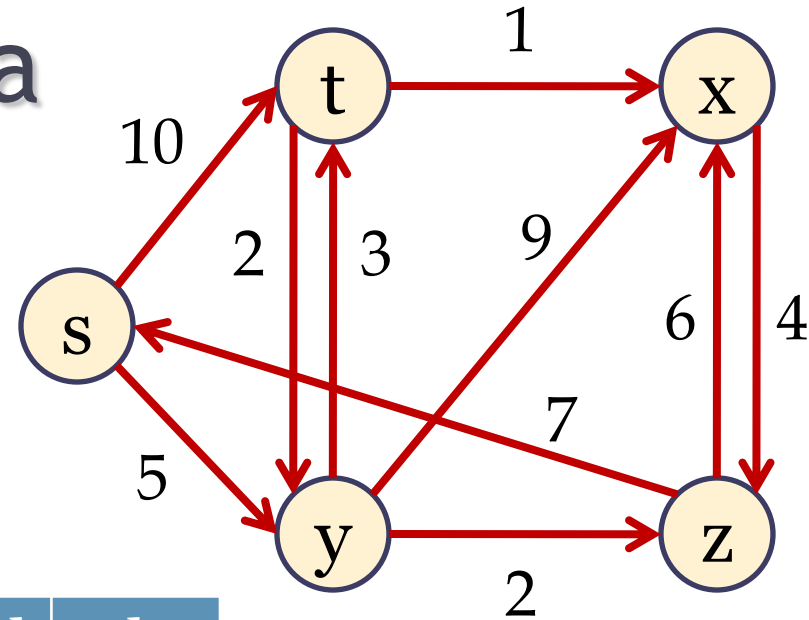
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	y

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	14	5	7
π	NULL	y	y	s	y
Q	---	X	X	---	X
S	X	---	---	X	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

→ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

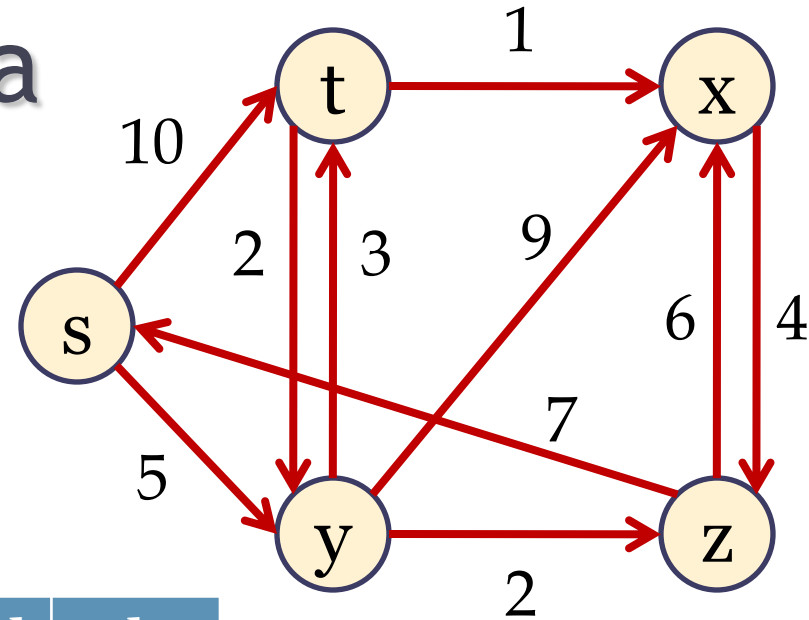
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	y

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	14	5	7
π	NULL	y	y	s	y
Q	---	X	X	---	X
S	X	---	---	X	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

→ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

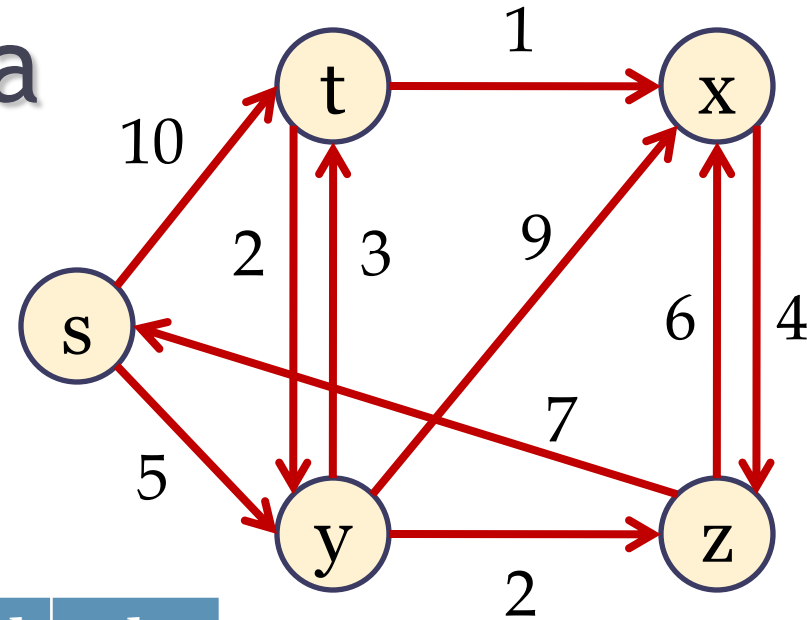
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	y

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	14	5	7
π	NULL	y	y	s	y
Q	---	X	X	---	X
S	X	---	---	X	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

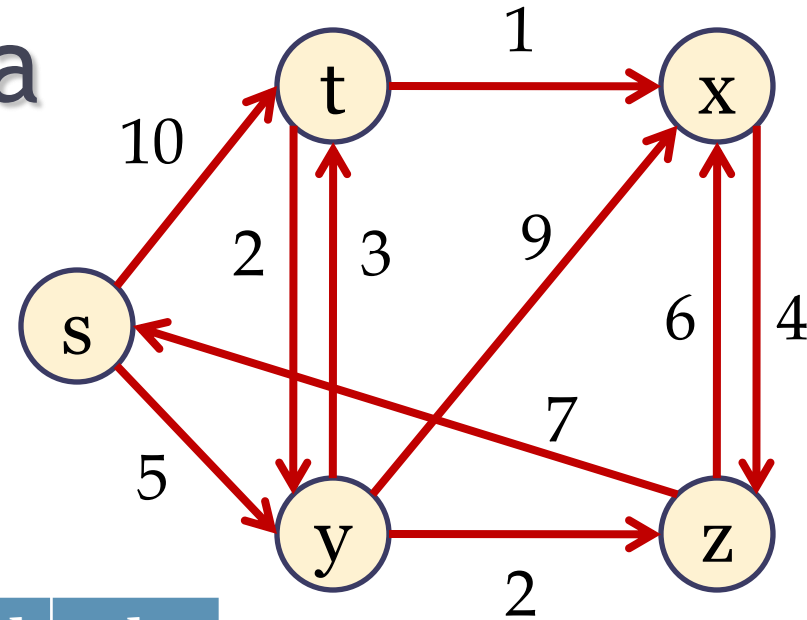
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	z

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	14	5	7
π	NULL	y	y	s	y
Q	---	X	X	---	---
S	X	---	---	X	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

➔ $S \leftarrow S \cup \{u\}$

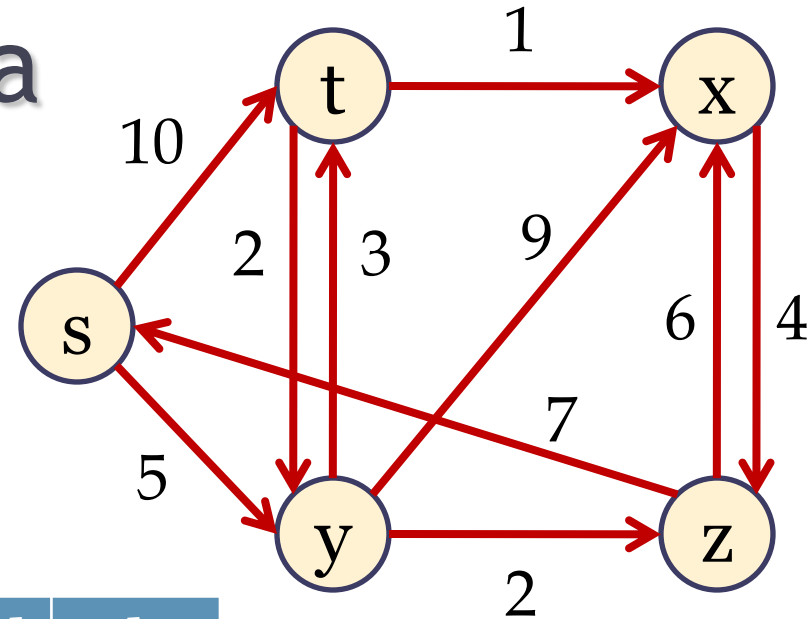
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	z

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	14	5	7
π	NULL	y	y	s	y
Q	---	X	X	---	---
S	X	---	---	X	---

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

➔ $S \leftarrow S \cup \{u\}$

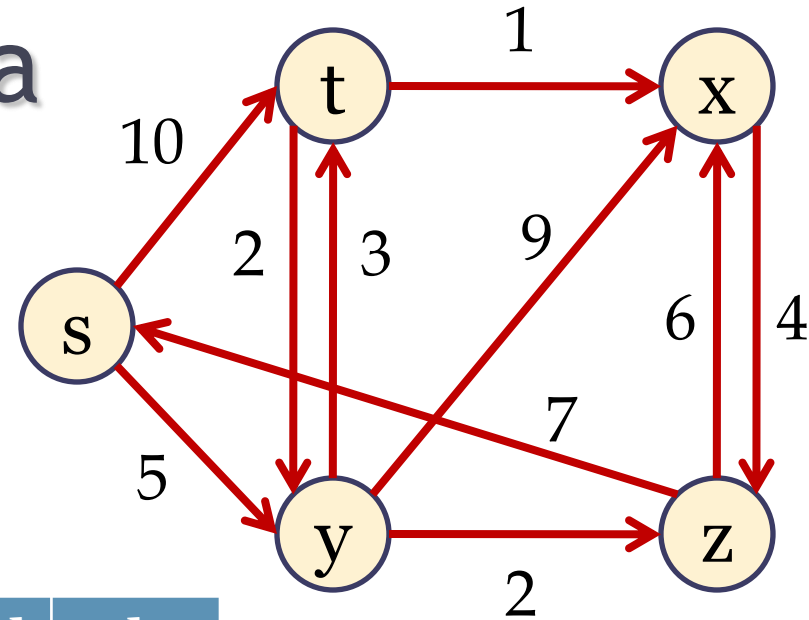
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	z

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	14	5	7
π	NULL	y	y	s	y
Q	---	X	X	---	---
S	X	---	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

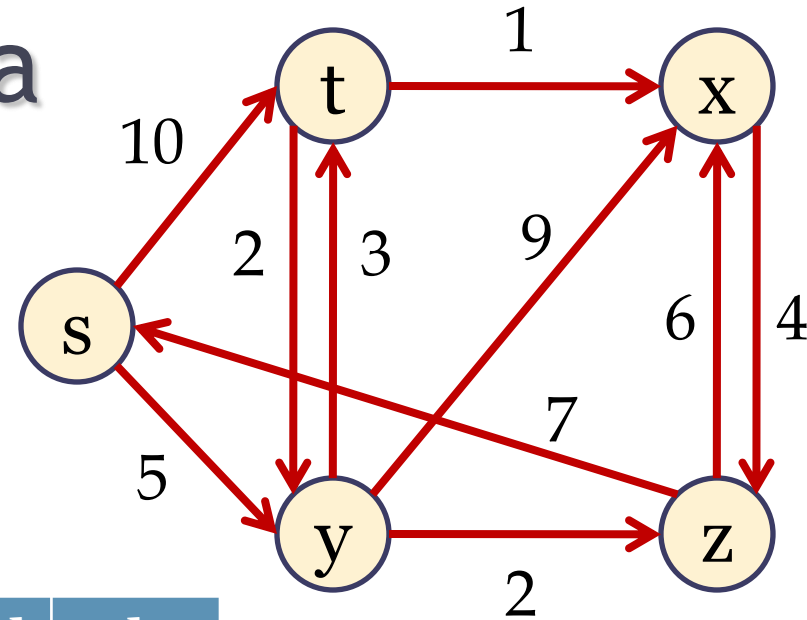
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	z

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	14	5	7
π	NULL	y	y	s	y
Q	---	X	X	---	---
S	X	---	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

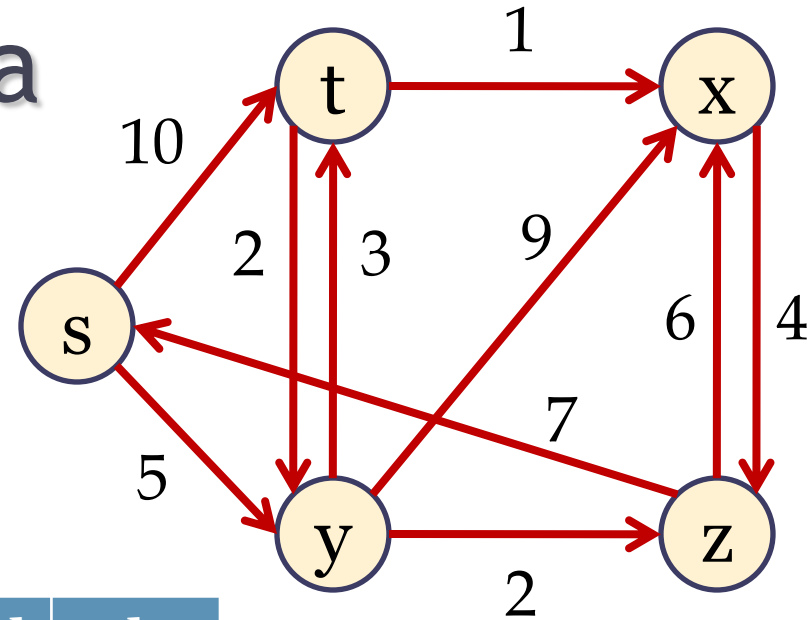
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	z

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	14	5	7
π	NULL	y	y	s	y
Q	---	X	X	---	---
S	X	---	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

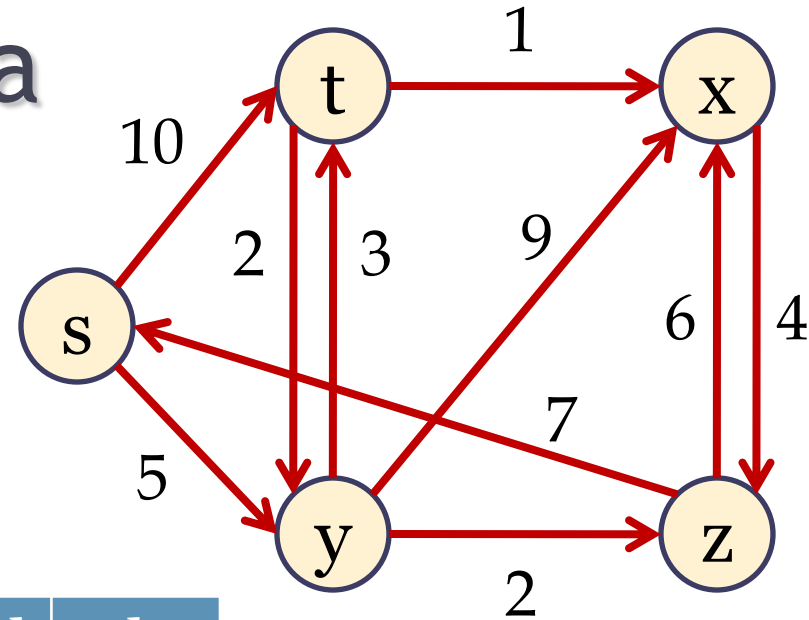
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	z

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	13	5	7
π	NULL	y	z	s	y
Q	---	X	X	---	---
S	X	---	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

→ Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

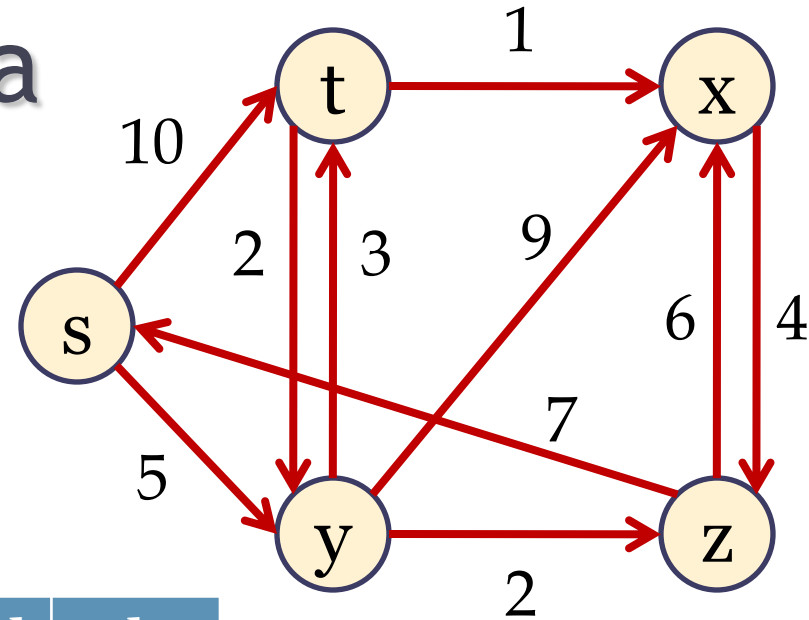
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	z

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	13	5	7
π	NULL	y	z	s	y
Q	---	X	X	---	---
S	X	---	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

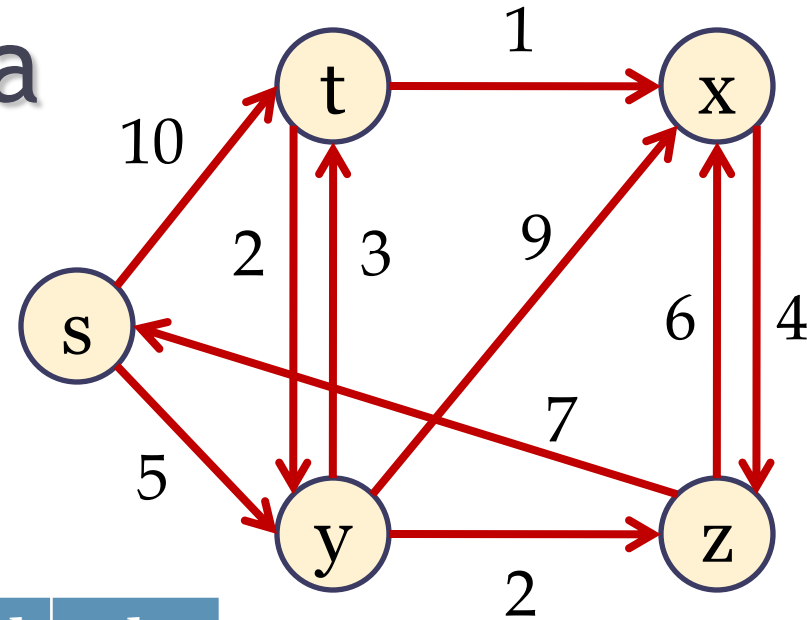
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	z

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	13	5	7
π	NULL	y	z	s	y
Q	---	X	X	---	---
S	X	---	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

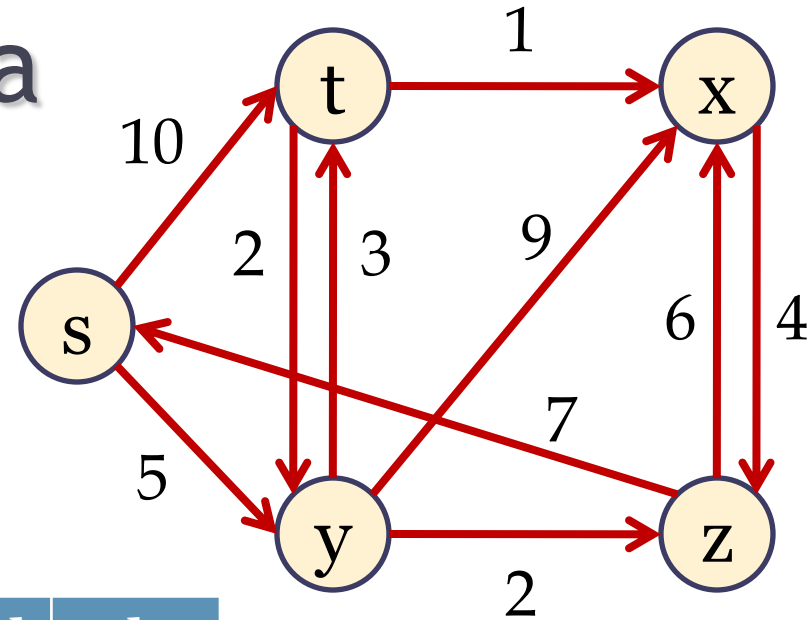
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	z

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	13	5	7
π	NULL	y	z	s	y
Q	---	X	X	---	---
S	X	---	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

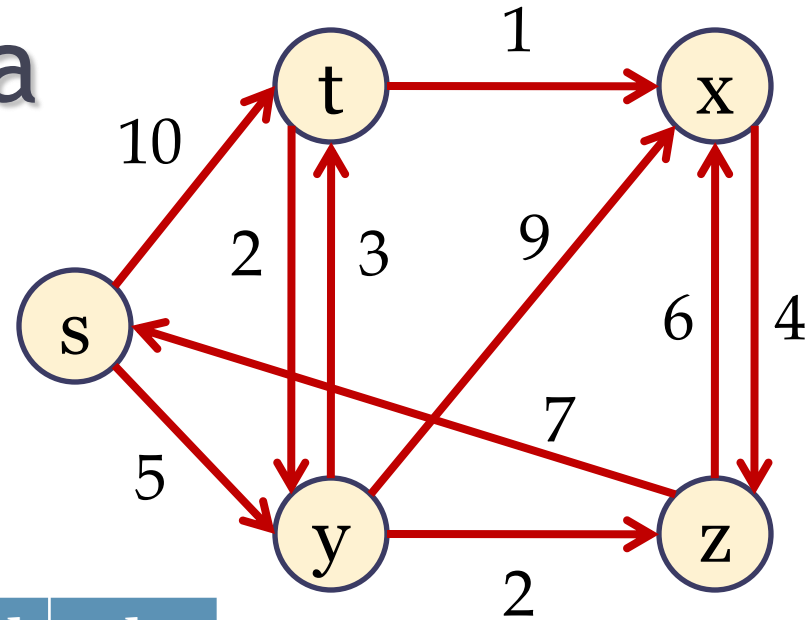
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	t

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	13	5	7
π	NULL	y	z	s	y
Q	---	---	X	---	---
S	X	---	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

→ $S \leftarrow S \cup \{u\}$

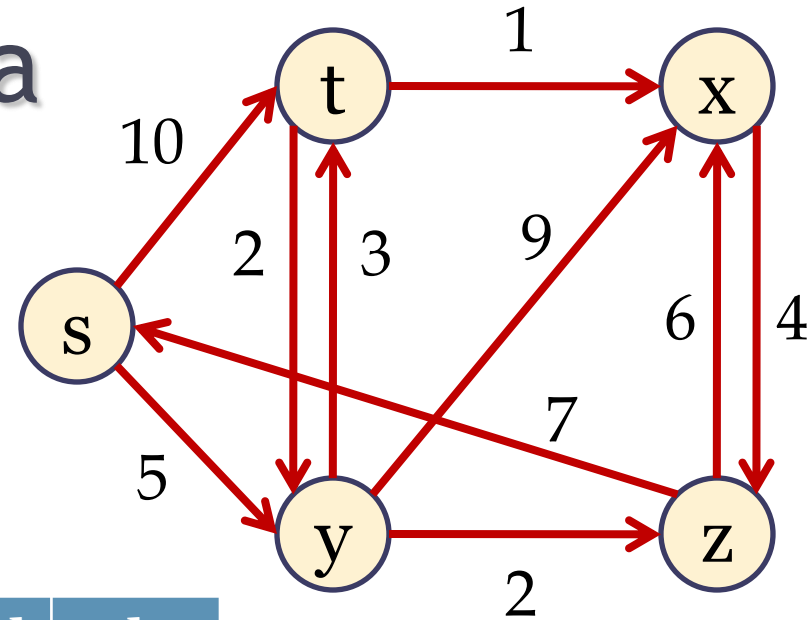
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	t

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	13	5	7
π	NULL	y	z	s	y
Q	---	---	X	---	---
S	X	---	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

➔ $S \leftarrow S \cup \{u\}$

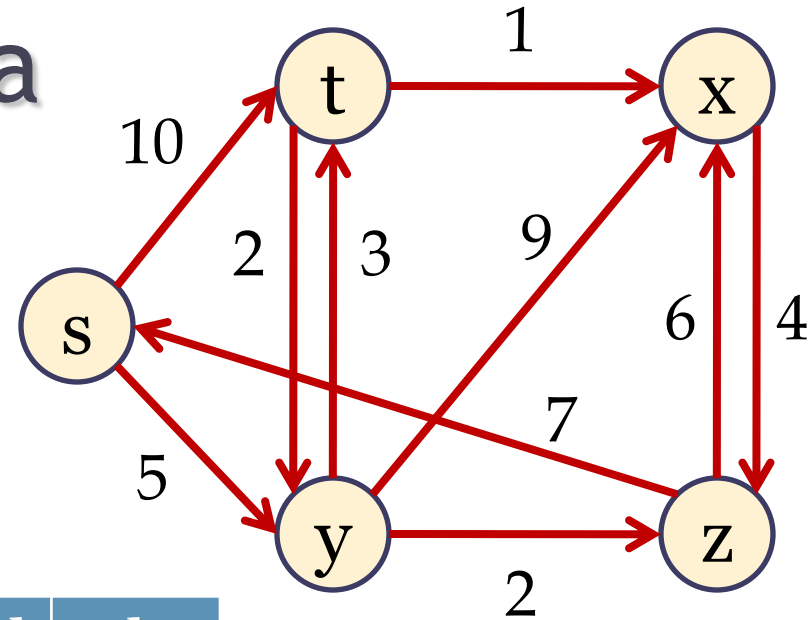
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	t

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	13	5	7
π	NULL	y	z	s	y
Q	---	---	X	---	---
S	X	X	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

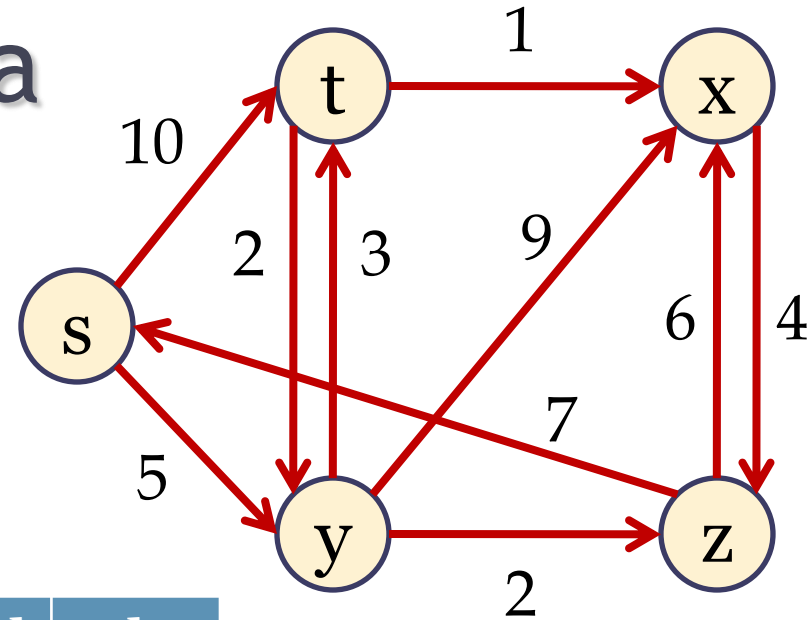
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	t

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	13	5	7
π	NULL	y	z	s	y
Q	---	---	X	---	---
S	X	X	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

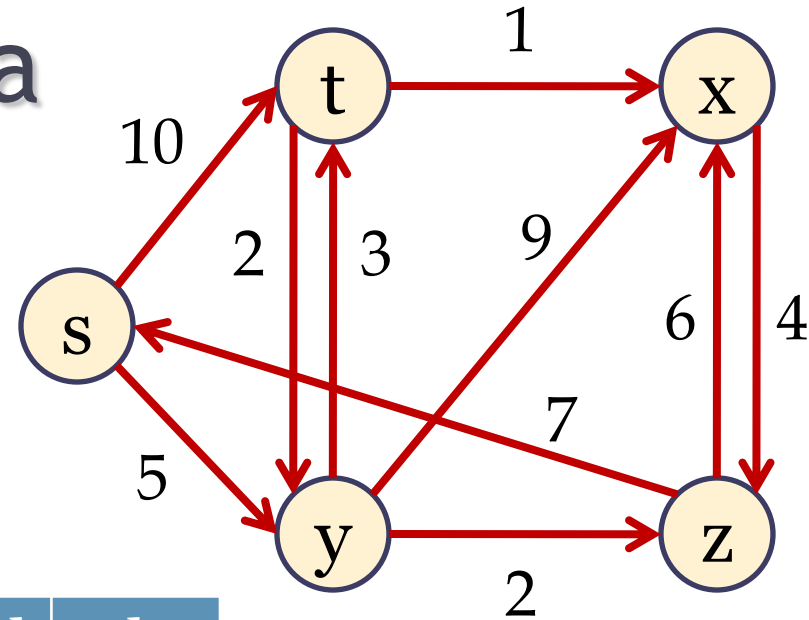
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	t

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	13	5	7
π	NULL	y	z	s	y
Q	---	---	X	---	---
S	X	X	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

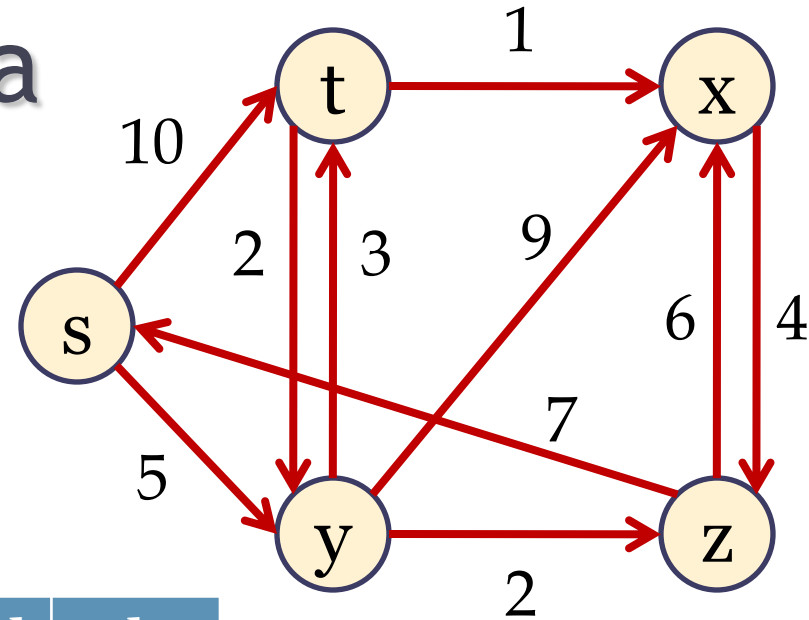
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	t

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	X	---	---
S	X	X	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

→ Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

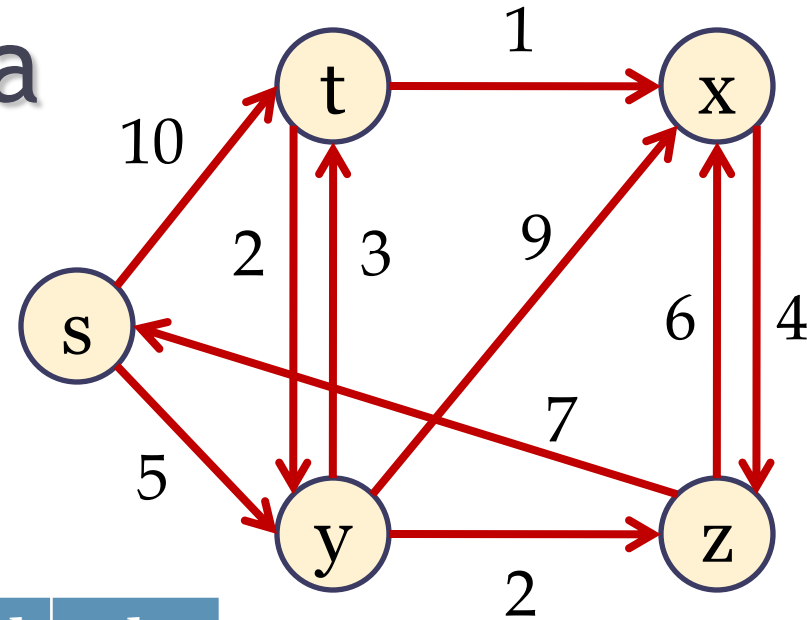
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	t

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	X	---	---
S	X	X	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

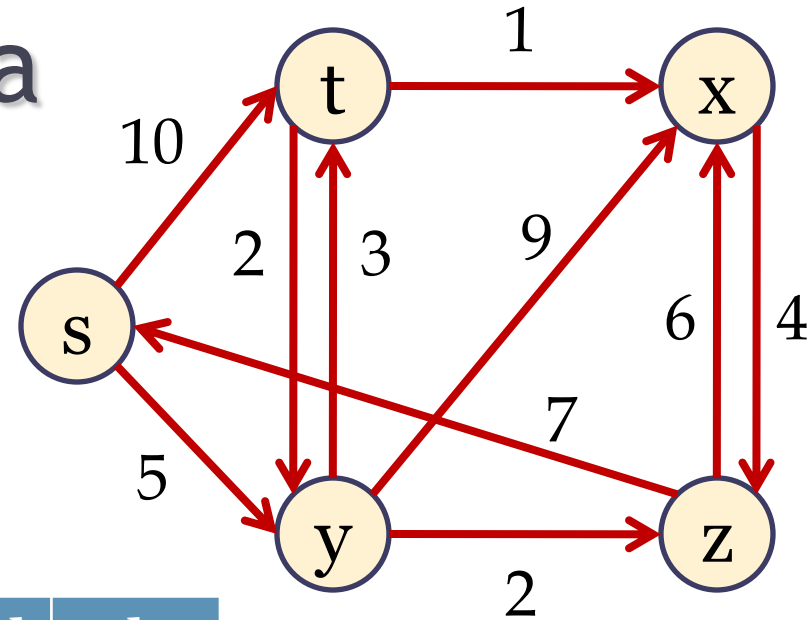
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	t

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	X	---	---
S	X	X	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

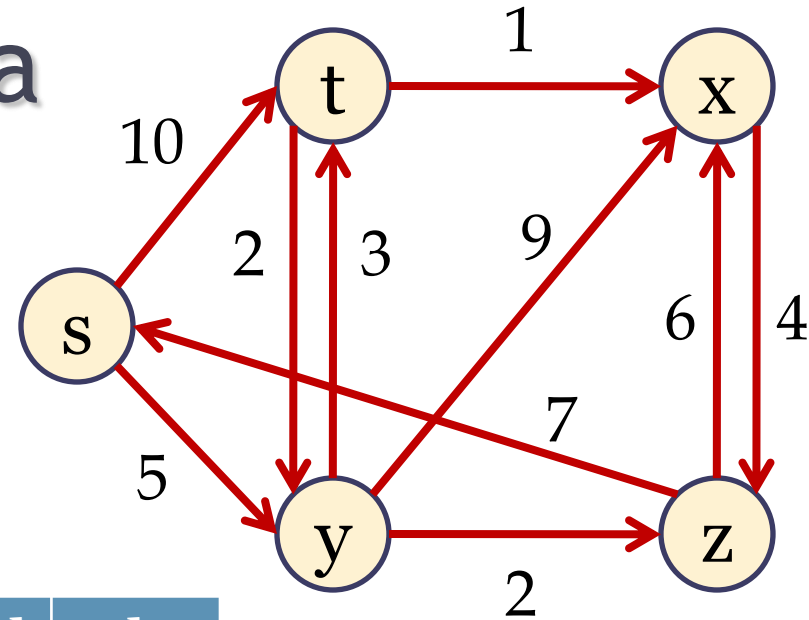
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	t

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	X	---	---
S	X	X	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

➔ $u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

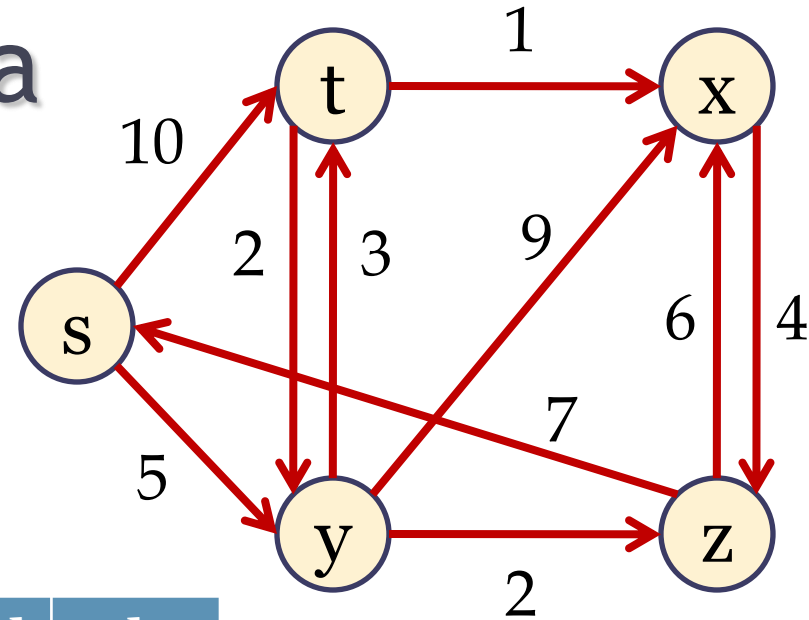
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	x

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	---	---	---
S	X	X	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

➔ $S \leftarrow S \cup \{u\}$

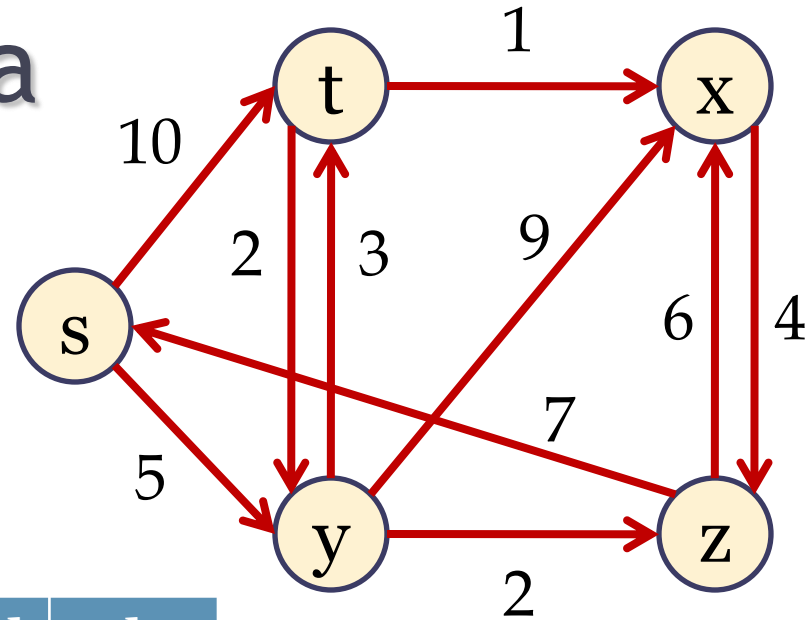
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	x

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	---	---	---
S	X	X	---	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

➔ $S \leftarrow S \cup \{u\}$

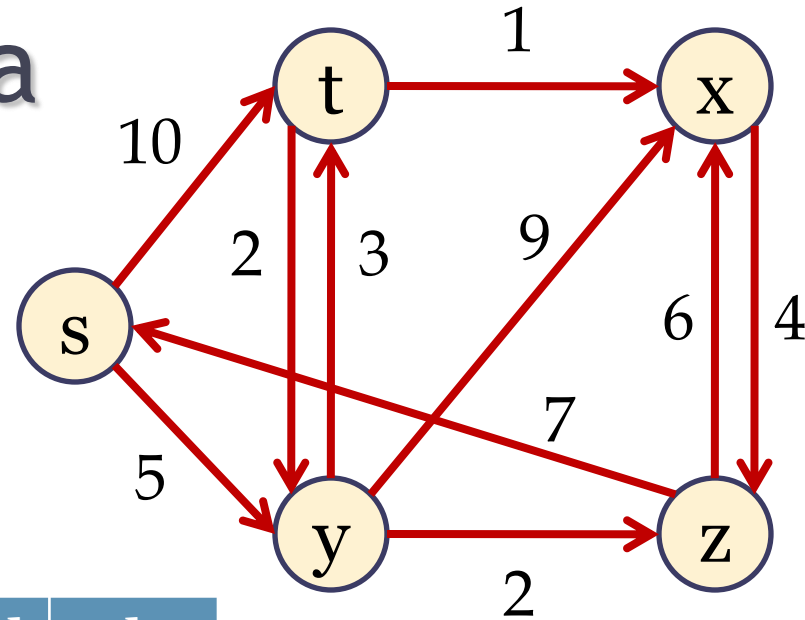
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	x

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	---	---	---
S	X	X	X	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

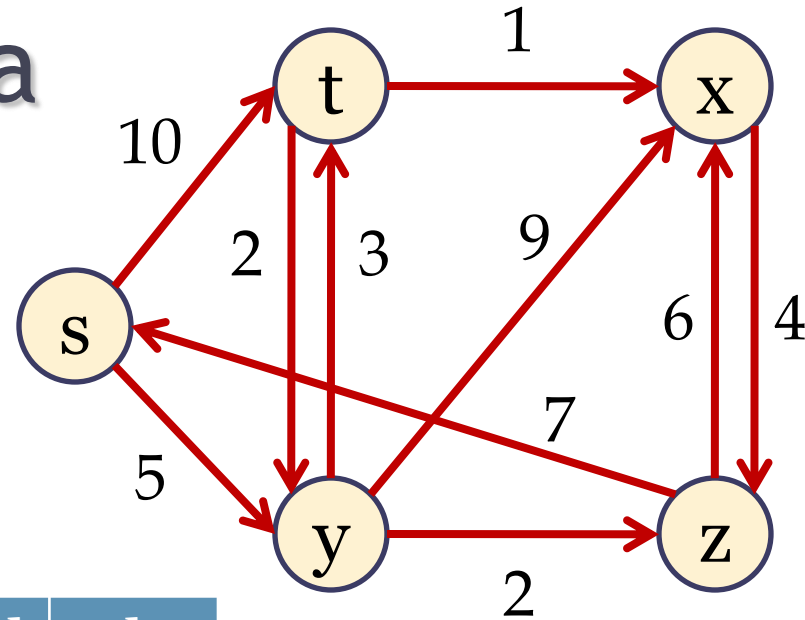
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	x

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	---	---	---
S	X	X	X	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

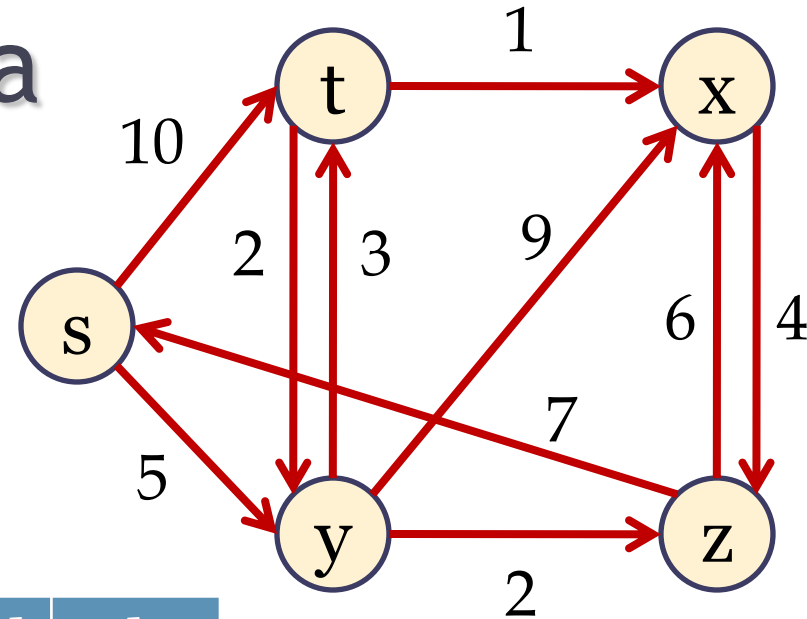
➔ para cada $v \in \text{Adj}[u]$

➔ *relaxa*(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	x

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	---	---	---
S	X	X	X	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

➔ *Enquanto* $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

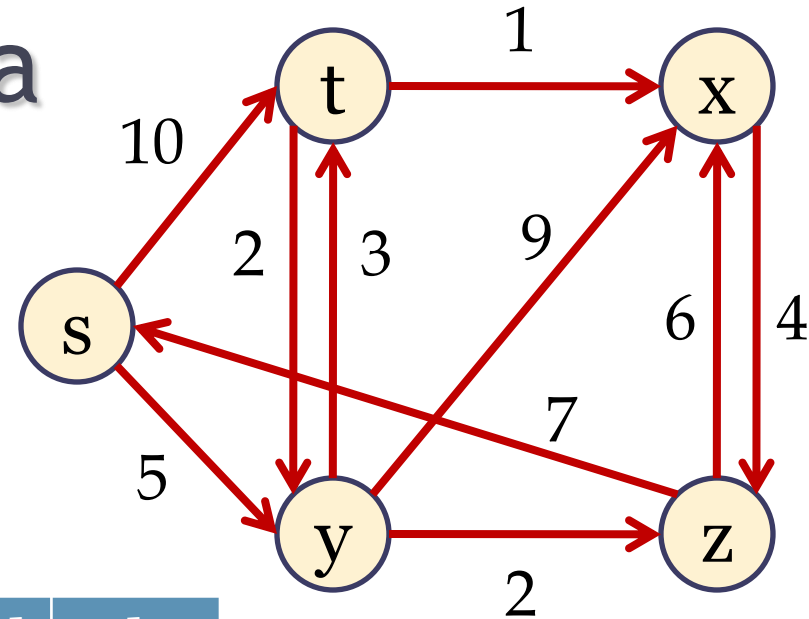
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

fim



variável	valor
u	x

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	---	---	---
S	X	X	X	X	X

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, A), w, s$)

INICIALIZA(G, s)

$S \leftarrow \{ \}$

$Q \leftarrow V$

Enquanto $|Q| \neq 0$

$u \leftarrow \text{extrair Minino}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

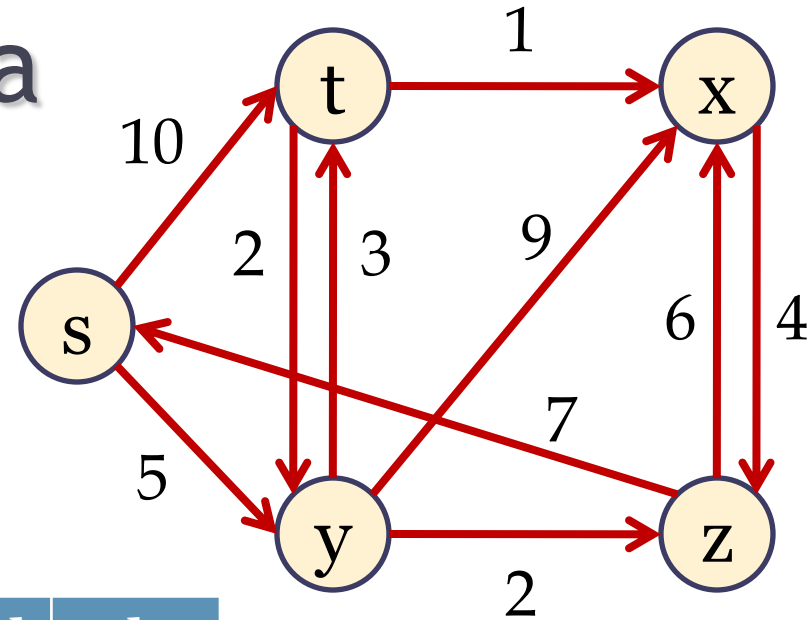
para cada $v \in \text{Adj}[u]$

relaxa(u, v, w)

fim para

fim enquanto

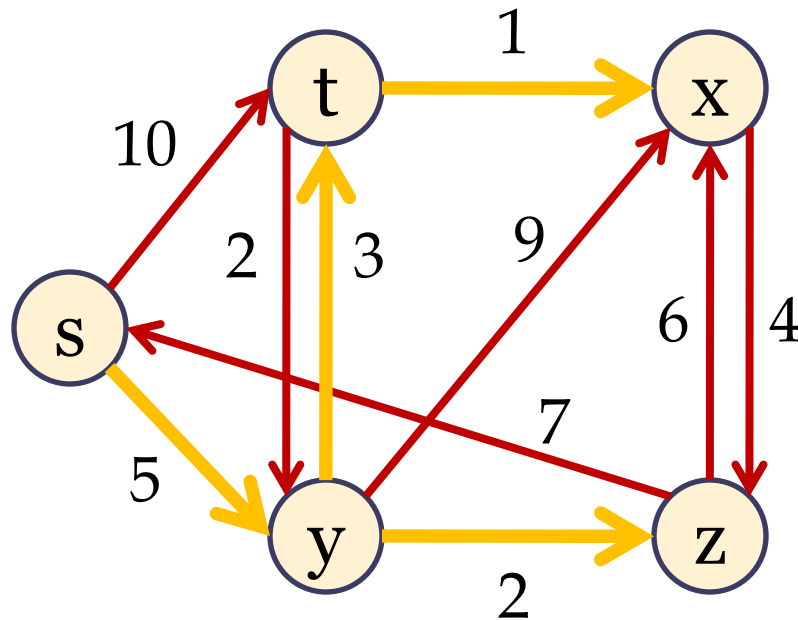
fim ←



variável	valor
u	x

vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y
Q	---	---	---	---	---
S	X	X	X	X	X

Algoritmo de Dijkstra



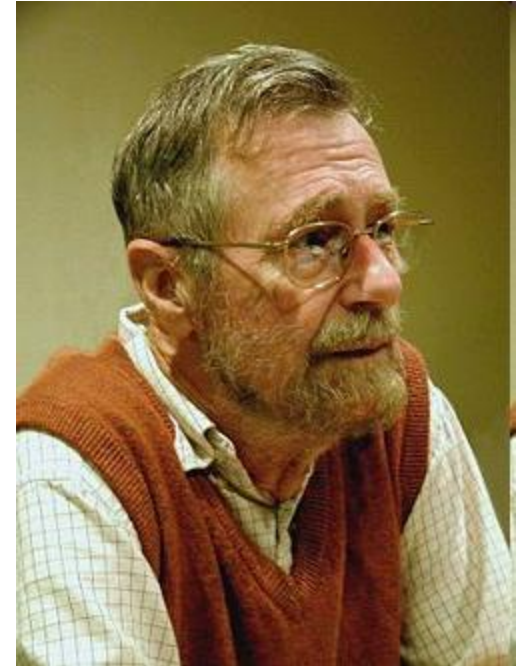
vértice	s	t	x	y	z
d	0	8	9	5	7
π	NULL	y	t	s	y

Algoritmo de Dijkstra

- Reflexão dos alunos...
 - E se o grafo possuir arestas de peso negativo?
 - A resposta do algoritmo de Dijkstra é correta?
 - Como otimizar o algoritmo de Dijkstra para localizar o menor caminho entre um par de vértices? Ele pode ser otimizado?

Dijkstra

- (1930-2002)
- Site: <http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/>
- No site você encontra toda a produção de publicada oficialmente de Dijkstra, incluindo também inúmeros manuscritos com provas e teorias nas mais diversas áreas da ciência da computação...



Exercícios

- Qual estrutura de dados você utilizaria para controlar o conjunto Q do algoritmo de Dijkstra? Justifique.
- Proponha um grafo com 10 vértices e 20 arestas, e aplique o Algoritmo de Dijkstra a partir de um vértice inicial qualquer. Mostre o desenvolvimento do algoritmo passo a passo.

```
DIJKSTRA( $G = (V, A), w, s$ )  
  INICIALIZA( $G, s$ )  
   $S \leftarrow \{ \}$   
   $Q \leftarrow V$   
  Enquanto  $|Q| \neq 0$   
     $u \leftarrow$  extrair Minimo( $Q$ )  
     $S \leftarrow S \cup \{u\}$   
    para cada  $v \in Adj[u]$   
      relaxa( $u, v, w$ )  
    fim para  
  fim enquanto  
fim
```

Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos - Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.
 - 24.3 - Algoritmo de Dijkstra.
- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;

