Universidade Federal de Alfenas

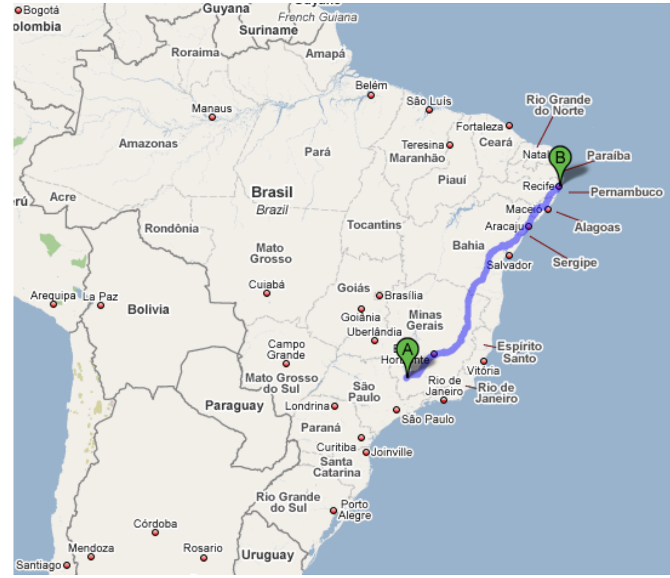
Algoritmos em Grafos

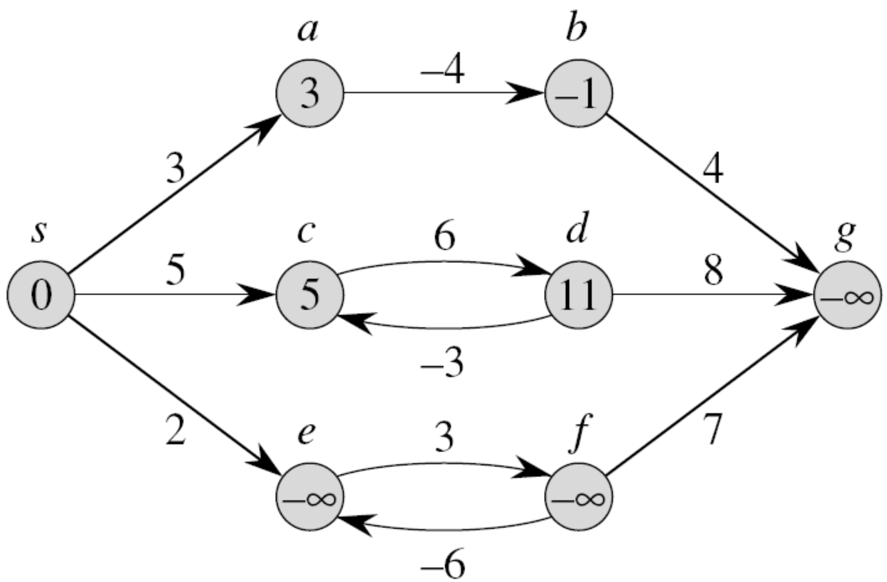
Aula 13 – Caminho Mínimo: Grafos Acíclicos

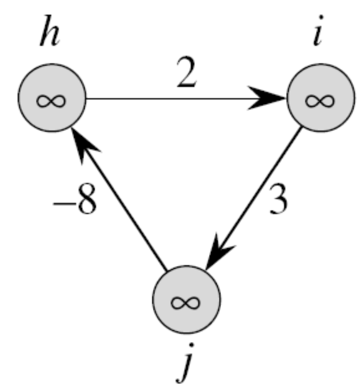
Prof. Humberto César Brandão de Oliveira
humberto@bcc.unifal-mg.edu.br

Última aula...

- Caminho mais curto (mínimo) de um para todos os outros vértices em em grafos cíclicos (ou acíclicos)...
- Os grafos podem ter ciclos de peso negativo...
  - Algoritmo de *Bellman-Ford*.







Algoritmo de Bellman-Ford

Última aula

$$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$$

$$\quad INICIALIZA(G,s)$$

$$\quad para\ i \leftarrow 1\ at\acute{e}\ |V|-1$$

$$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$$

$$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$$

$$\quad\quad fim\ \ para$$

$$\quad fim\ \ para$$

$$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$$

$$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$$

$$\quad\quad\quad retorna\ falso$$

$$\quad\quad fim\ \ se$$

$$\quad fim\ \ para$$

$$\quad retorna\ verdadeiro$$

$$fim$$

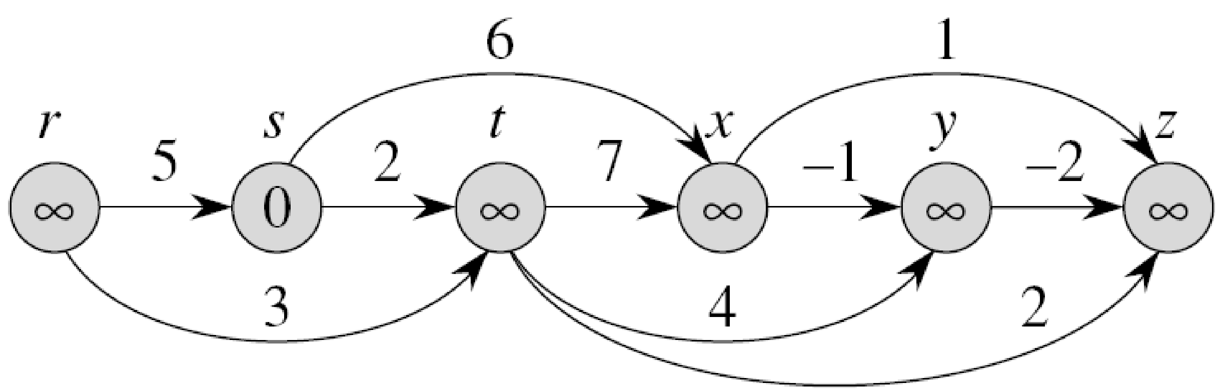
Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Quando os grafos não possuem ciclos, podemos otimizar o algoritmo que calcula o caminho mínimo de um vértice para todos os outros vértices...

- Detalhe... O Algoritmo de *Bellman-Ford* continua resolvendo o problema... mas...
  - Lembrando que ele resolve para o caso mais geral;
  - Ele possui complexidade algorítmica elevada, apesar de ter comportamento polinomial no pior caso.

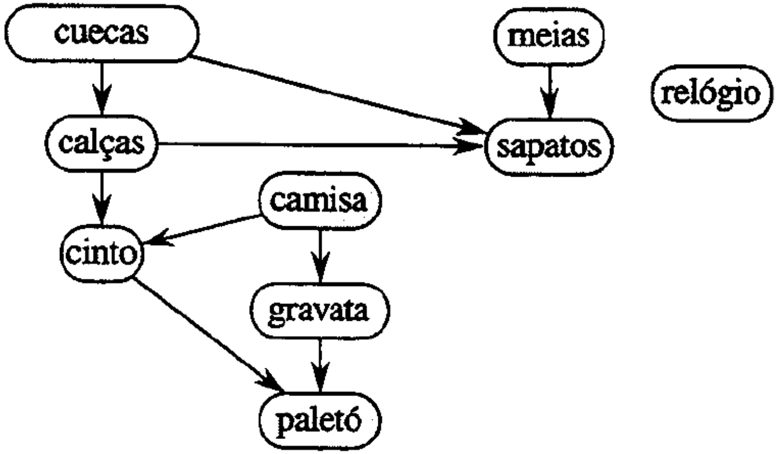
Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Antes do aprendizado do algoritmo desta aula, precisamos entender o algoritmo de ordenação topológica...



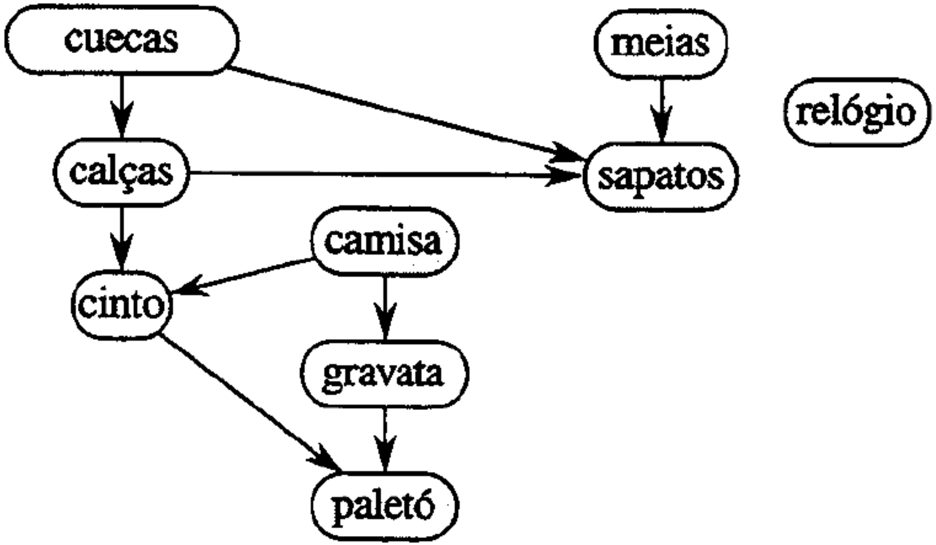
Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- GAO: Grafos Acíclicos Orientados:
  - Estes, são utilizados para indicar precedência de eventos;
  - Geralmente utilizados para descrever processos;
  - Uma aresta orientada *(u, v)* no GAO indica que a peça de roupa *u* deve ser vestida antes da peça *v*.



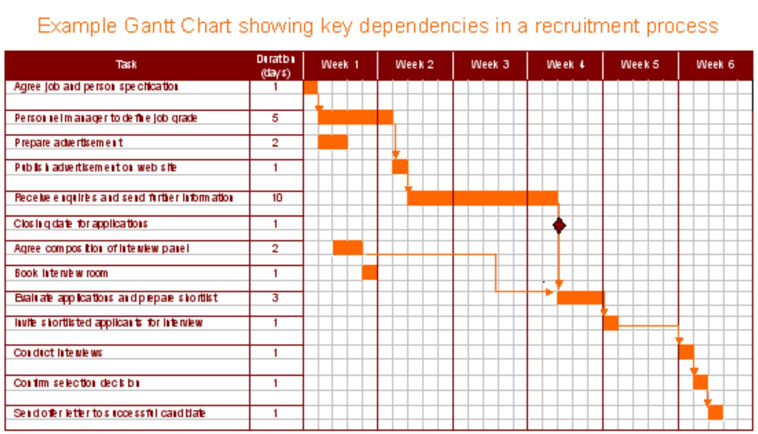
Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

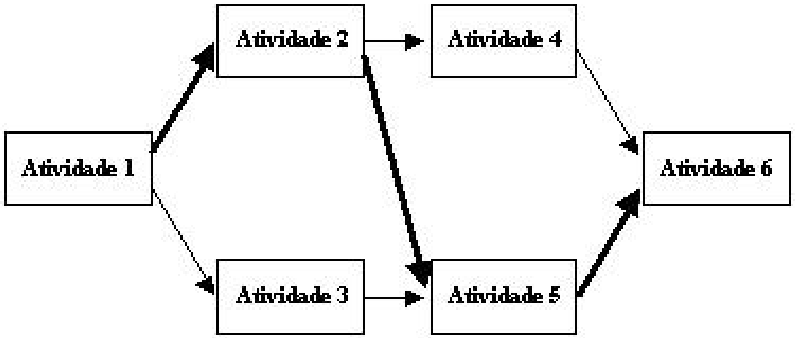
- Ordenação Topológica:
  - Exemplo simplificado: o processo de se vestir de um homem...
  - Colocar meia antes do sapato:
    - aresta (meia,sapato)
  - Colocar camisa antes da gravata
    - Aresta (camisa, gravata)



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Ordenação Topológica:
  - Grafos acíclicos orientados são utilizados em muitas aplicações para indicar precedência entre eventos;
  - Exemplo:
    - Caminho crítico em Gerência de Projetos.



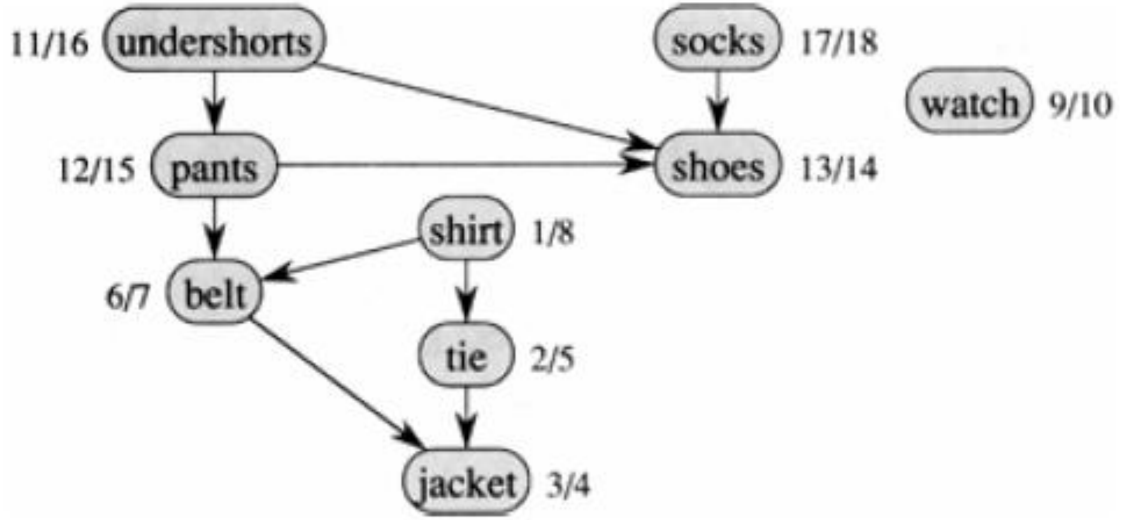


Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- **Ordenação Topológica:**
  - Algoritmo:
  - Entrada: G=(V,A):
    - Chamar DFS (busca em profundidade);
    - Em função do vertor *f* (tempo de finalização), retorne uma lista ordenada inversa de todos os vértices do grafo G.

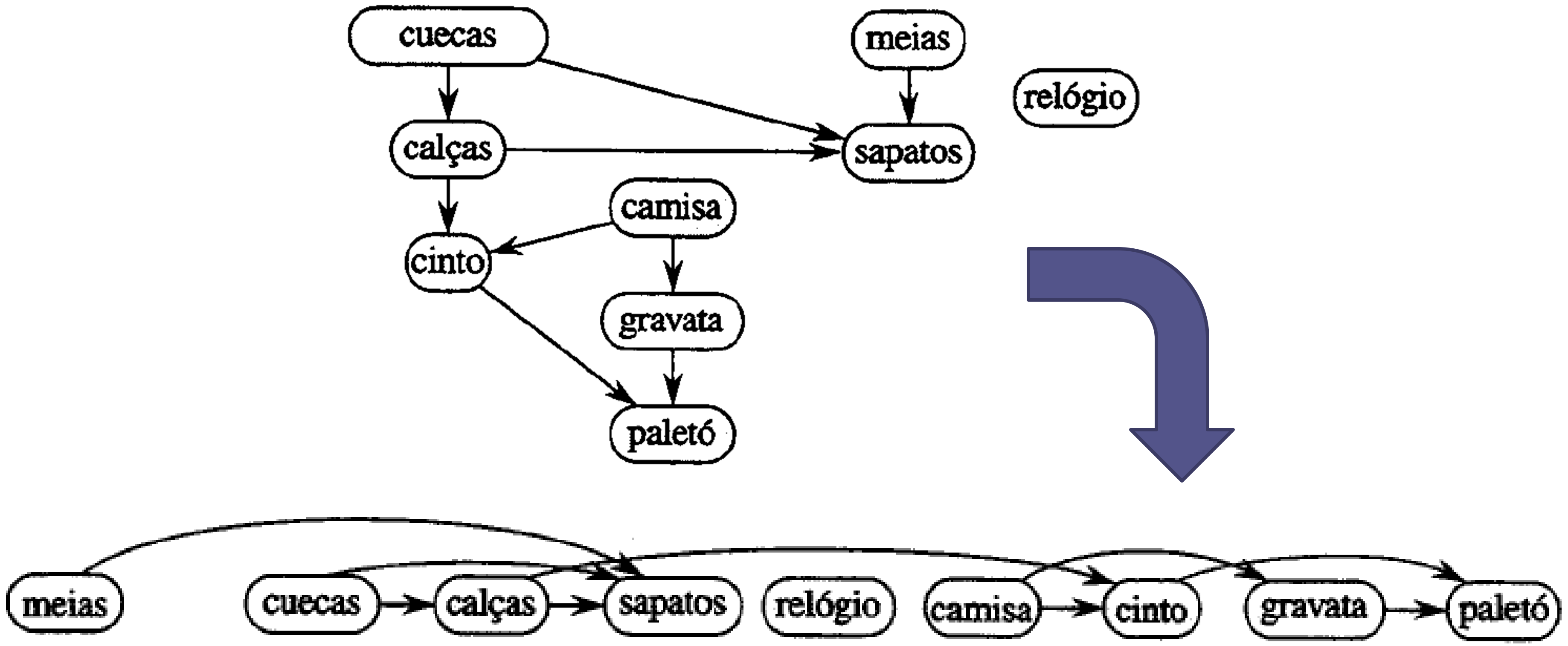
Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- De outra forma...
- Ordenação Topológica:
  - Algoritmo:
    - Chamar DFS (busca em profundidade);
    - A medida que os vértices forem marcados como pretos, adicionar o vértice no início de uma pilha...
    - Retornar pilha...



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Ordenação Topológica:
  - Exemplo de execução da ordenação topológica....



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Ordenação Topológica:
  - Comentário:
    - Podemos encontrar algumas implementações da ordenação topológica, que não altera o método original da DFS, e utiliza apenas o vetor *f* ao final de sua execução.
    - Este método precisa utilizar um algoritmo de ordenação, o que deixa o procedimento "mais caro" computacionalmente.
      - Operação *n log(n)* no último passo.

Algoritmo dos Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Relaxando as arestas de um GAO (grafo acíclico orientado) ponderado de acordo com uma ordenação topológica de seus vértices, podemos calcular caminhos mais curtos a partir de uma única origem com complexidade $O(|V|+|A|)$;

- Relembrando:
  - Bellman-Ford: $O(|V|.|A|)$

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Relembrando dois métodos básicos:

$$\text{INICIALIZA}(G=(V,A),s)$$
$$\quad para\ cada\ v \in V$$
$$\quad\quad d[v] = \infty$$
$$\quad\quad \pi[v] = NULL$$
$$\quad fim\ para$$
$$\quad d[s] = 0$$
$$fim$$

$$\text{RELAXA}(u,v,w)$$
$$\quad se\ d[v] > (d[u] + w(u,v))\ então$$
$$\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u,v)$$
$$\quad\quad \pi[v] = u$$
$$\quad fim\ se$$
$$fim$$

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad para\ cada\ vértice\ u \in K\ \text{(em ordem topológica)}\ faça$

$\quad\quad para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$\quad\quad\quad relaxa(u, v, w)$

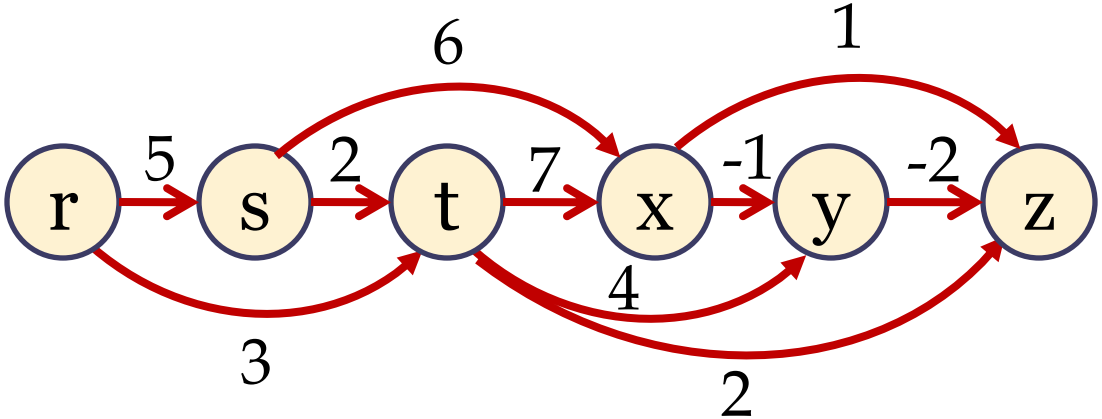
$\quad\quad fim\ para$

$\quad fim\ para$

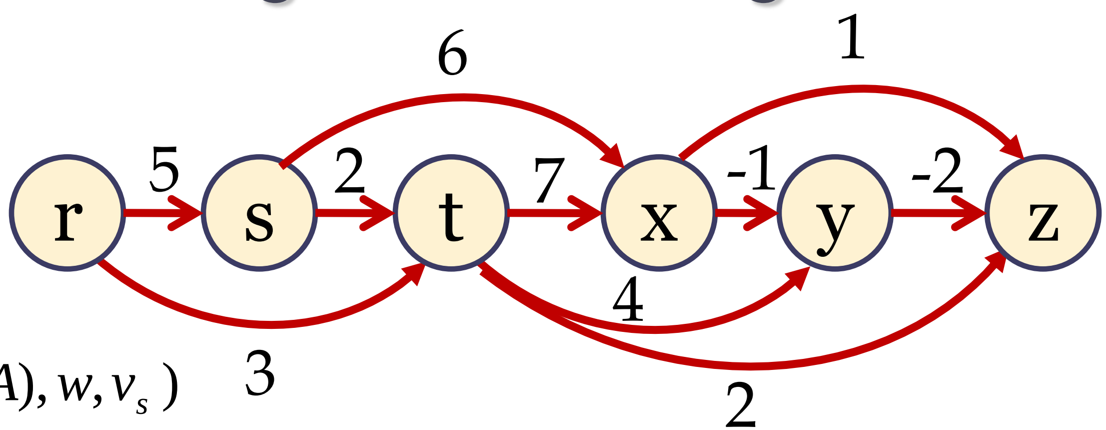
$fim.$

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- <u>Vamos acompanhar para o grafo:</u>



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad K \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad \textit{para cada vértice } u \in K \text{ (em ordem topológica) } \textit{faça}$

$\quad\quad \textit{para cada vértice } v \in Adj[u] \textit{ faça}$

$\quad\quad\quad relaxa(u, v, w)$

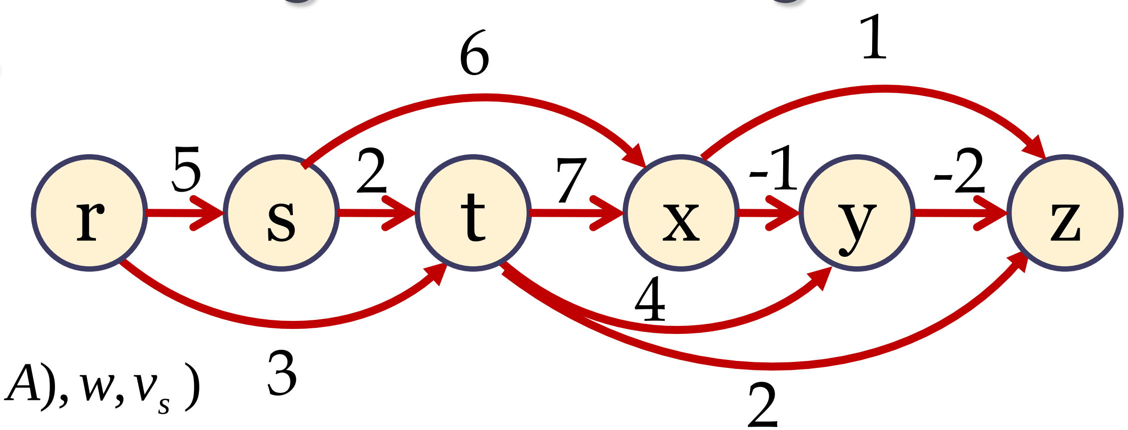
$\quad\quad \textit{fim para}$

$\quad \textit{fim para}$

$\textit{fim.}$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	---	---	---	---	---	---
π	---	---	---	---	---	---
K	---	---	---	---	---	---

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G=(V,A),w,v_s)$

$\text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$INICIALIZA((V,A),v_s)$

$para\ cada\ vértice\ u \in K\ \text{(em ordem topológica)}\ faça$

$para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$relaxa(u,v,w)$

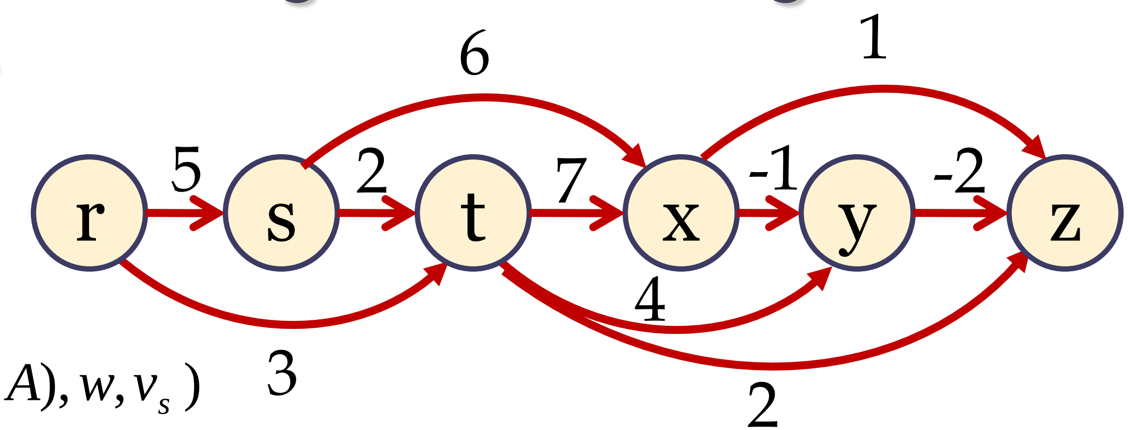
$fim\ para$

$fim\ para$

$fim.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	---	---	---	---	---	---
π	---	---	---	---	---	---
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G=(V,A),w,v_s)$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V,A),v_s)$

$\quad \textit{para cada vértice } u \in K \text{ (em ordem topológica) } \textit{faça}$

$\qquad \textit{para cada vértice } v \in Adj[u] \textit{ faça}$

$\qquad\quad relaxa(u,v,w)$

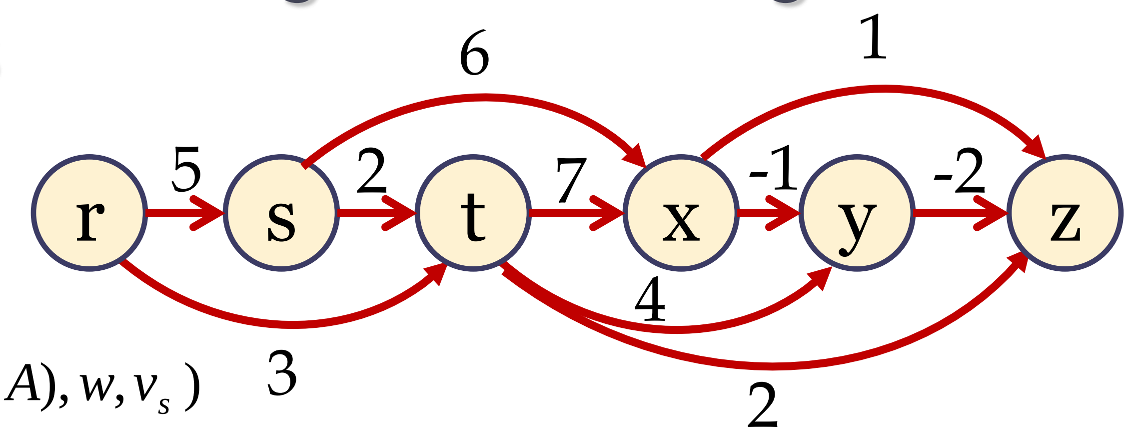
$\qquad \textit{fim para}$

$\quad \textit{fim para}$

$\textit{fim.}$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad K \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad \textit{para cada vértice } u \in K \text{ (em ordem topológica) } \textit{faça}$

$\quad\quad \textit{para cada vértice } v \in Adj[u] \textit{ faça}$

$\quad\quad\quad relaxa(u, v, w)$

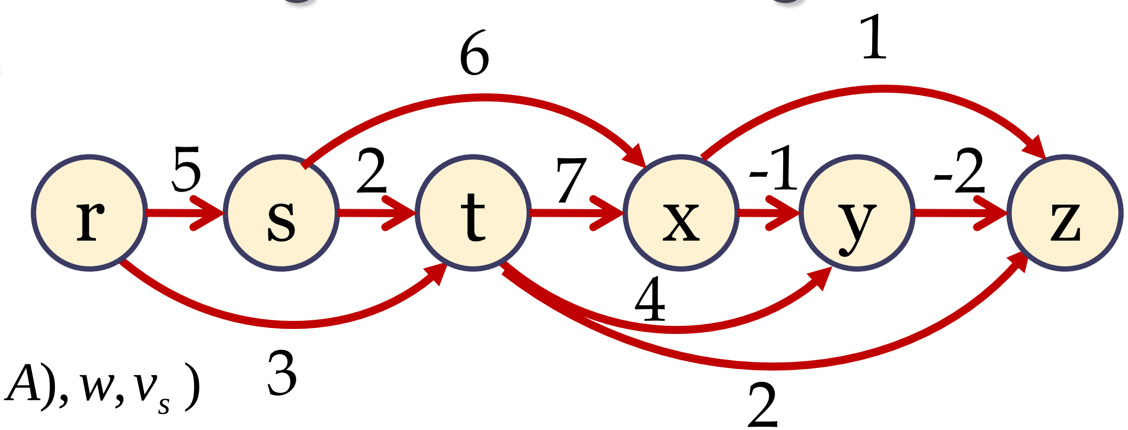
$\quad\quad \textit{fim para}$

$\quad \textit{fim para}$

$\textit{fim.}$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
K	$\boxed{r}$	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G=(V,A),w,v_s)$$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V,A),v_s)$

$\quad para\ cada\ vértice\ u \in K\ \text{(em ordem topológica)}\ faça$

$\quad\quad para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$\quad\quad\quad relaxa(u,v,w)$

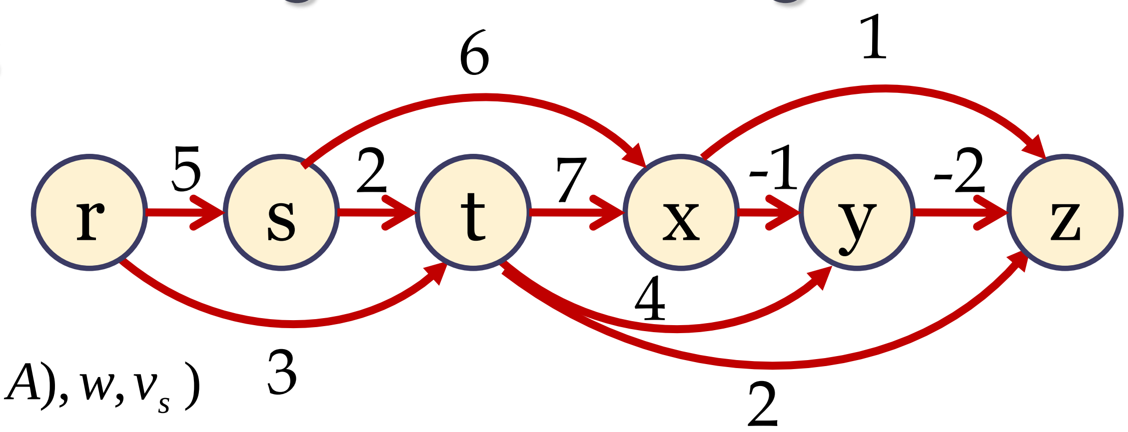
$\quad\quad fim\ para$

$\quad fim\ para$

$fim.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G=(V,A), w, v_s)$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V,A), v_s)$

$\quad para\ cada\ vértice\ u \in K\ \text{(em ordem topológica)}\ faça$

$\quad\quad para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$\quad\quad\quad relaxa(u,v,w)$

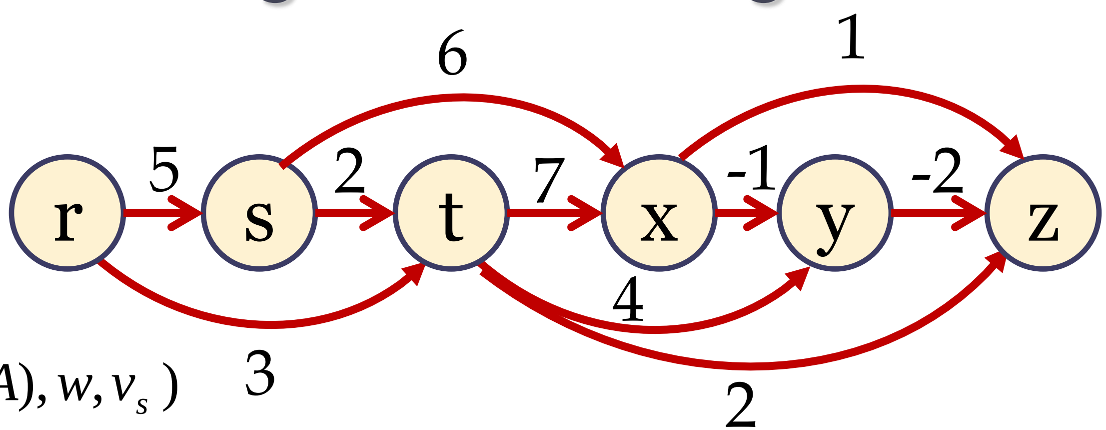
$\quad\quad fim\ para$

$\quad fim\ para$

$fim.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	∞	∞	∞
π	NULL	r	r	NULL	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$$

$\quad K \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad \textit{para cada vértice } u \in K \text{ (em ordem topológica) } \textit{faça}$

$\quad\quad \textit{para cada vértice } v \in Adj[u] \textit{ faça}$

$\quad\quad\quad relaxa(u, v, w)$

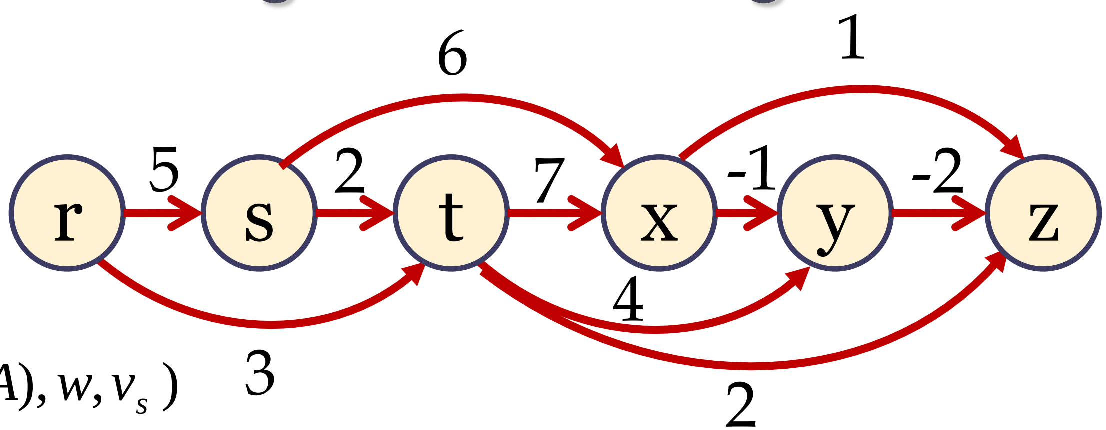
$\quad\quad \textit{fim para}$

$\quad \textit{fim para}$

$\textit{fim}.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	∞	∞	∞
π	NULL	r	r	NULL	NULL	NULL
K	r	$\boxed{s}$	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad K \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad \textit{para cada vértice } u \in K \text{ (em ordem topológica) } \textit{faça}$

$\quad\quad \textit{para cada vértice } v \in Adj[u] \textit{ faça}$

$\quad\quad\quad relaxa(u, v, w)$

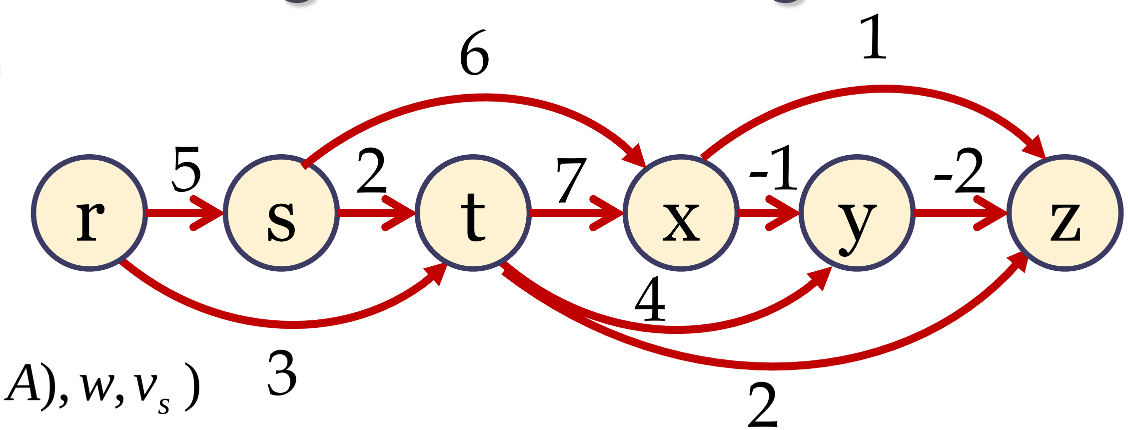
$\quad\quad \textit{fim para}$

$\quad \textit{fim para}$

$\textit{fim.}$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	∞	∞	∞
π	NULL	r	r	NULL	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad para\ cada\ vértice\ u \in K\ \text{(em ordem topológica)}\ faça$

$\quad\quad para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$\quad\quad\quad relaxa(u, v, w)$

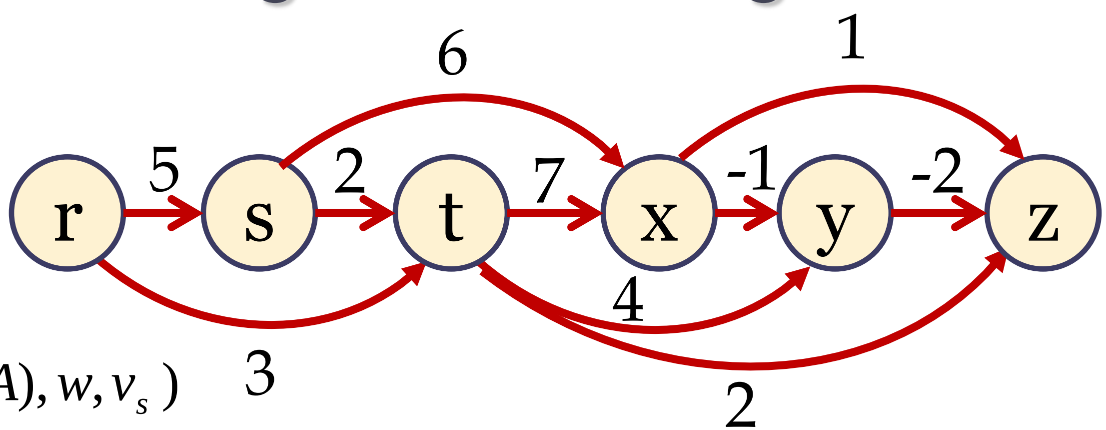
$\quad\quad fim\ para$

$\quad fim\ para$

$fim.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	11	∞	∞
π	NULL	r	r	s	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G=(V,A),w,v_s)$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V,A),v_s)$

$\quad para\ cada\ vértice\ u \in K\ \text{(em ordem topológica)}\ faça$

$\qquad para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$\qquad\quad relaxa(u,v,w)$

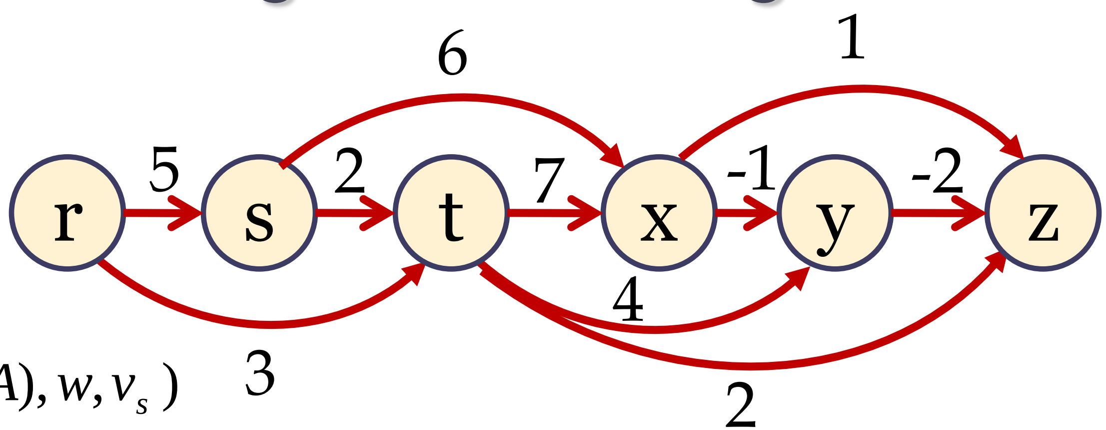
$\qquad fim\ para$

$\quad fim\ para$

$fim.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	11	∞	∞
π	NULL	r	r	s	NULL	NULL
K	r	s	$\boxed{t}$	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$$

$\quad K \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad$ *para cada vértice* $u \in K$ (em ordem topológica) *faça*

$\quad\quad$ *para cada vértice* $v \in Adj[u]$ *faça*

$\quad\quad\quad relaxa(u, v, w)$

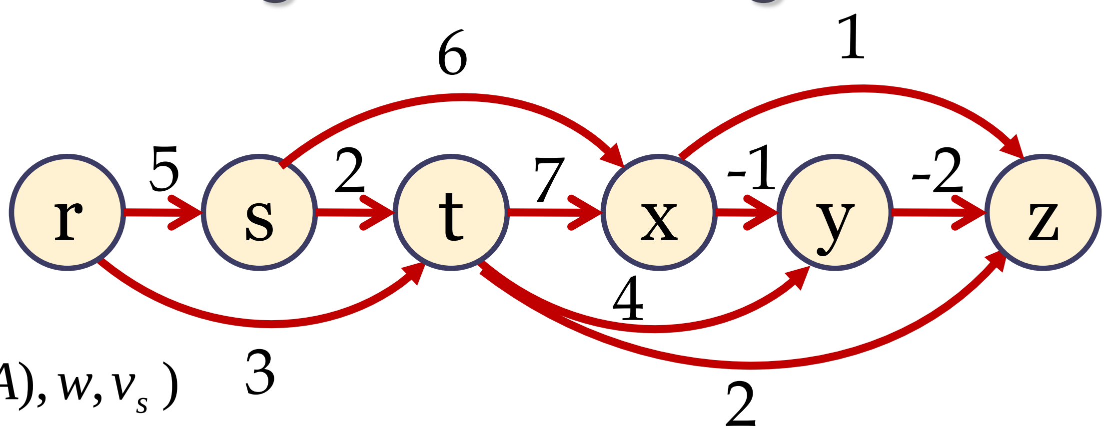
$\quad\quad$ *fim para*

$\quad$ *fim para*

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	11	∞	∞
π	NULL	r	r	s	NULL	NULL
K	r	s	$\boxed{t}$	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G=(V,A),w,v_s)$$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V,A),v_s)$

$\quad \textit{para cada vértice } u \in K \text{ (em ordem topológica) } \textit{faça}$

$\qquad \textit{para cada vértice } v \in Adj[u] \textit{ faça}$

$\qquad\quad relaxa(u,v,w)$

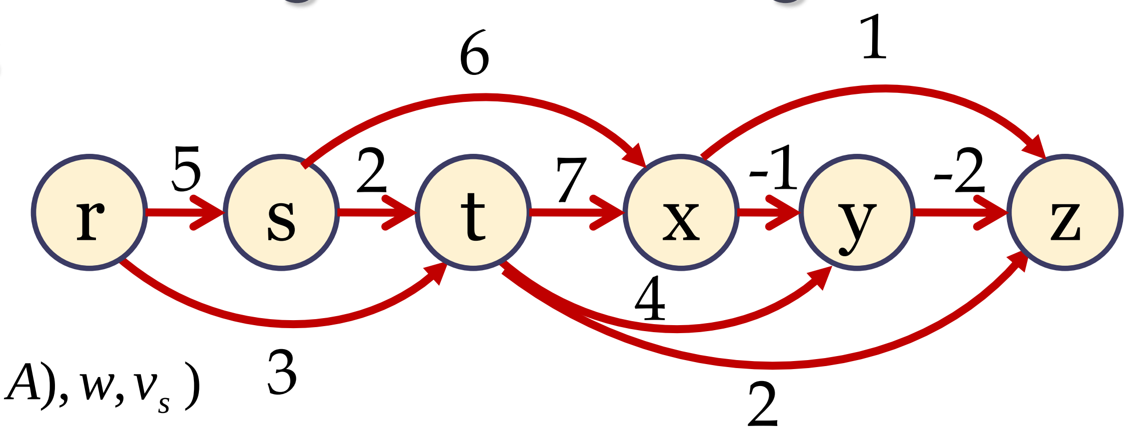
$\qquad \textit{fim para}$

$\quad \textit{fim para}$

$\textit{fim.}$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad \textit{para cada vértice } u \in K \text{ (em ordem topológica) } \textit{faça}$

$\qquad \textit{para cada vértice } v \in Adj[u] \textit{ faça}$

$\qquad\quad relaxa(u, v, w)$

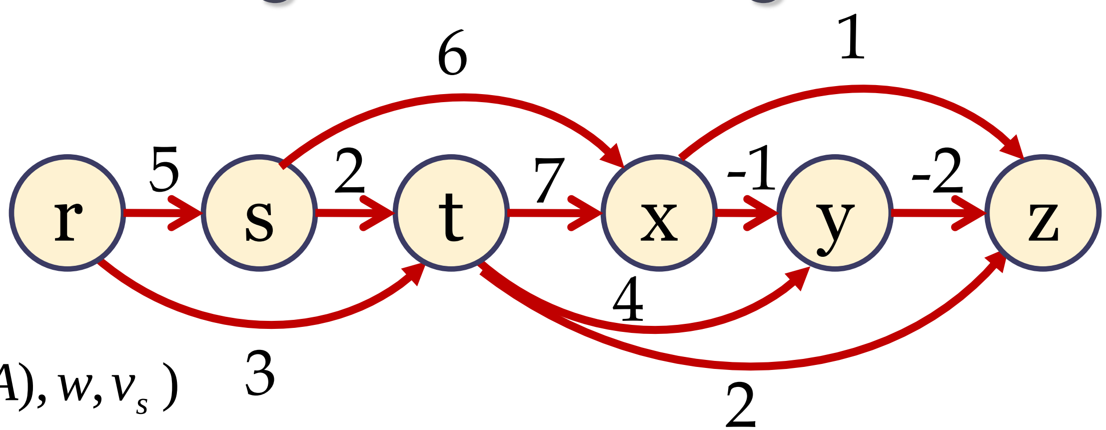
$\qquad \textit{fim para}$

$\quad \textit{fim para}$

$\textit{fim.}$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	$\boxed{x}$	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad para\ cada\ vértice\ u \in K$ (em ordem topológica) $faça$

$\quad\quad para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$\quad\quad\quad relaxa(u, v, w)$

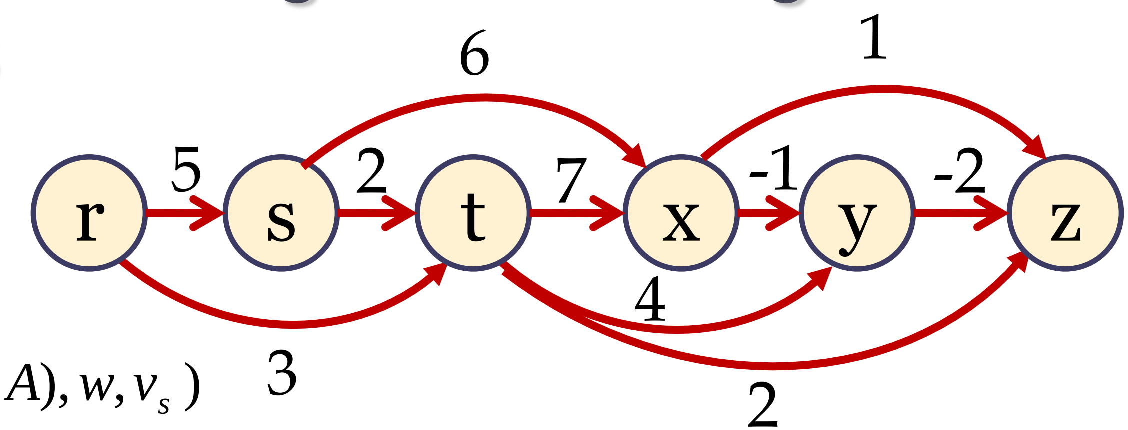
$\quad\quad fim\ para$

$\quad fim\ para$

$fim.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad K \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad \textit{para cada vértice } u \in K \text{ (em ordem topológica) } \textit{faça}$

$\quad\quad \textit{para cada vértice } v \in Adj[u] \textit{ faça}$

$\quad\quad\quad relaxa(u, v, w)$

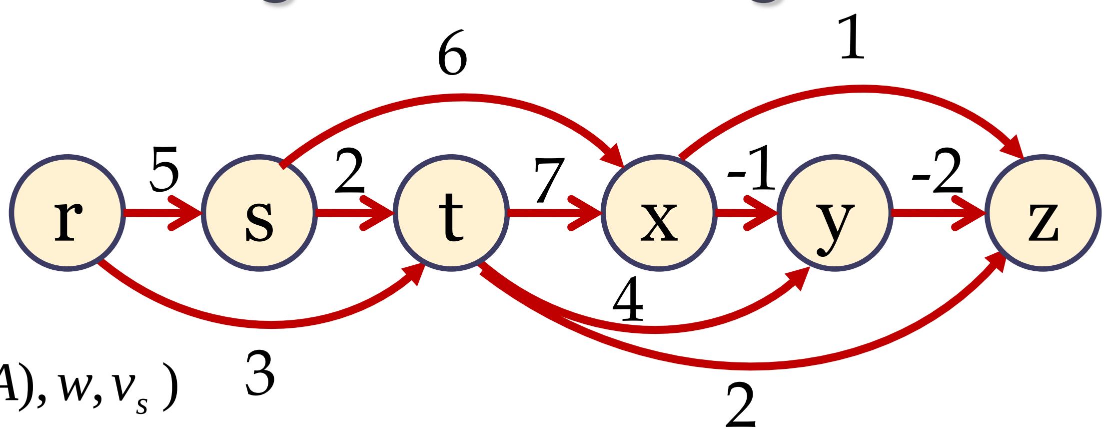
$\quad\quad \textit{fim para}$

$\quad \textit{fim para}$

$\textit{fim.}$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	$\boxed{y}$	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G=(V,A),w,v_s)$$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V,A),v_s)$

$\quad para\ cada\ vértice\ u \in K\ \text{(em ordem topológica)}\ faça$

$\quad\quad para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$\quad\quad\quad relaxa(u,v,w)$

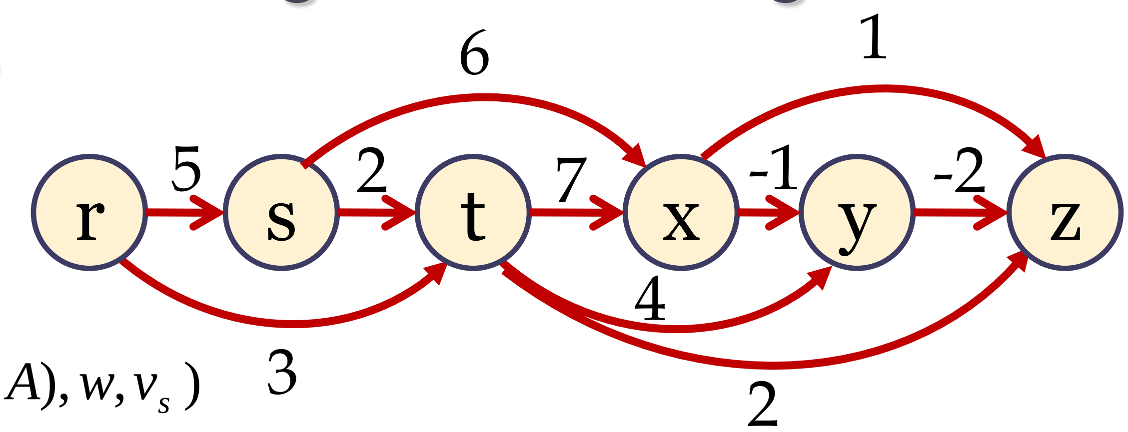
$\quad\quad fim\ para$

$\quad fim\ para$

$fim.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad para\ cada\ vértice\ u \in K\ \text{(em ordem topológica)}\ faça$

$\qquad para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$\qquad\quad relaxa(u, v, w)$

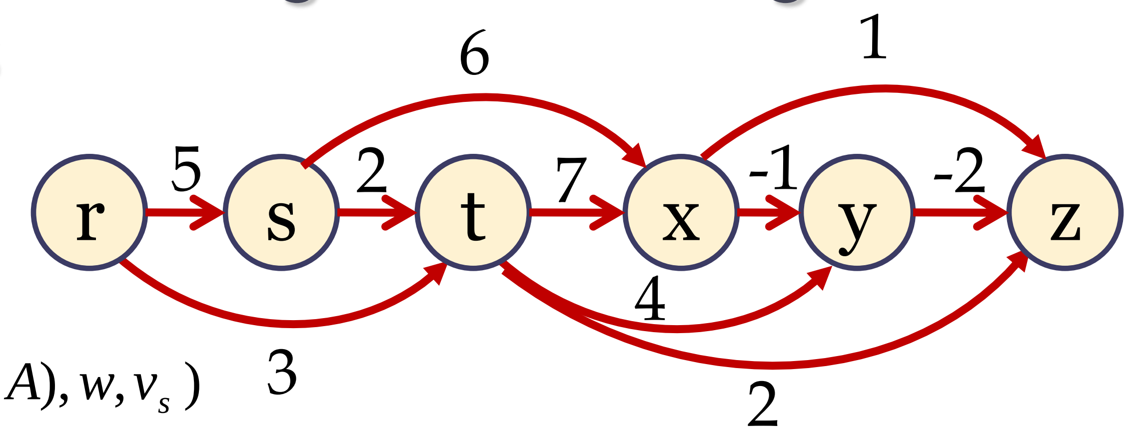
$\qquad fim\ para$

$\quad fim\ para$

$fim.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	$\boxed{\text{z}}$

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad para\ cada\ vértice\ u \in K\ \text{(em ordem topológica)}\ faça$

$\qquad para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$\qquad\quad relaxa(u, v, w)$

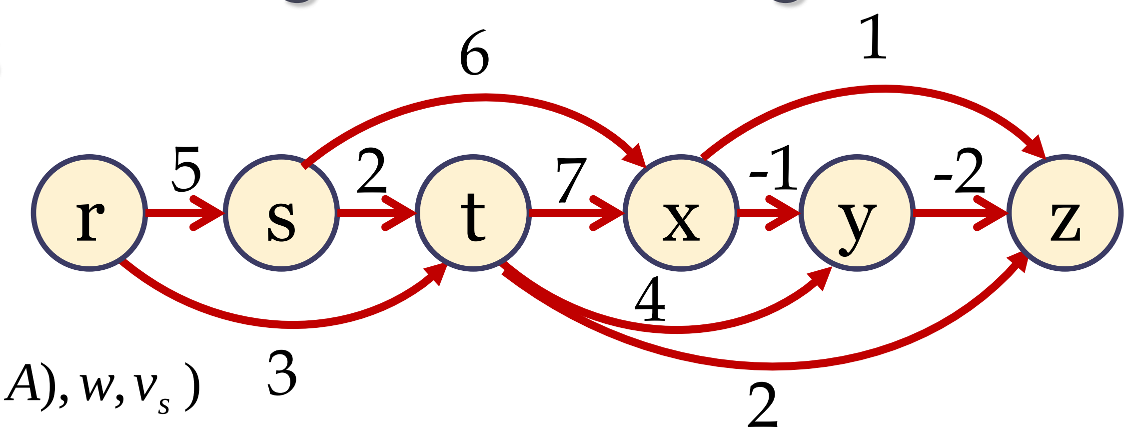
$\qquad fim\ para$

$\quad fim\ para$

$fim.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	$\boxed{z}$

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



$\text{CaminhoMinimo\_GAO}(G = (V, A), w, v_s)$

$\quad \text{K} \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

$\quad INICIALIZA((V, A), v_s)$

$\quad para\ cada\ vértice\ u \in K\ \text{(em ordem topológica)}\ faça$

$\qquad para\ cada\ vértice\ v \in Adj[u]\ faça$

$\qquad\quad relaxa(u, v, w)$

$\qquad fim\ para$

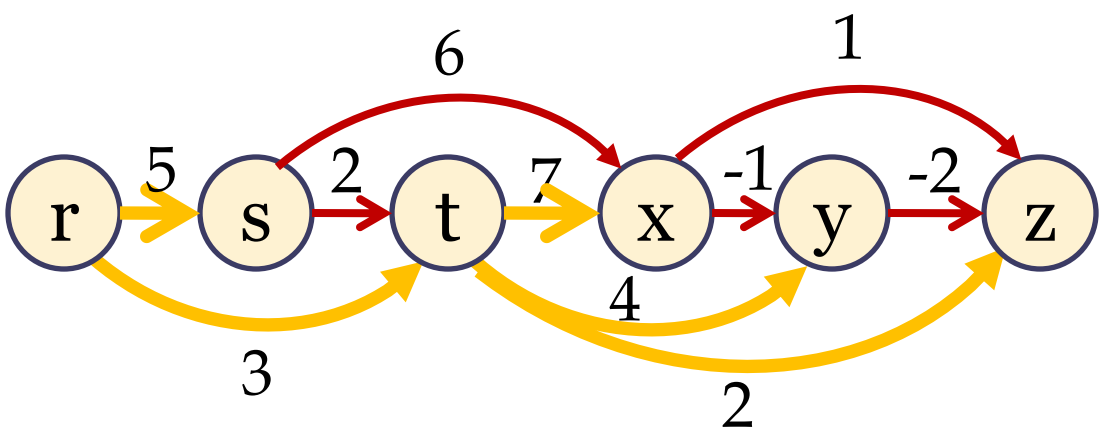
$\quad fim\ para$

$fim.$

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- <u>Solução:</u>



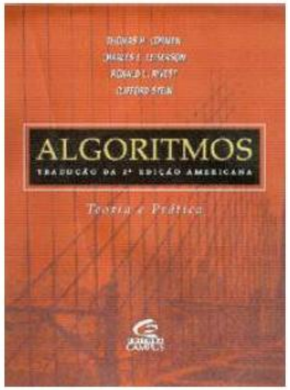
vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t

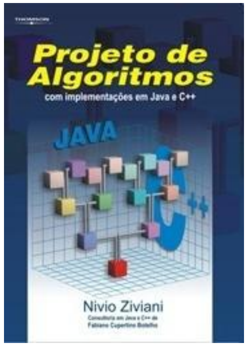
Exercícios

- Proponha um grafo acíclico com 10 vértices e 20 arestas. Execute passo a passo o algoritmo sobre o grafo proposto.
- Indique uma aplicação da ordenação topológica relacionada a processos da industria. Mostre um exemplo.

Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.
  - 22.4 – Ordenação topológica;
  - 24.2 – CM para GAO





- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;