

Universidade Federal de Alfenas

Algoritmos em Grafos

Aula 08 – Árvore Geradora Mínima: Algoritmo Genérico

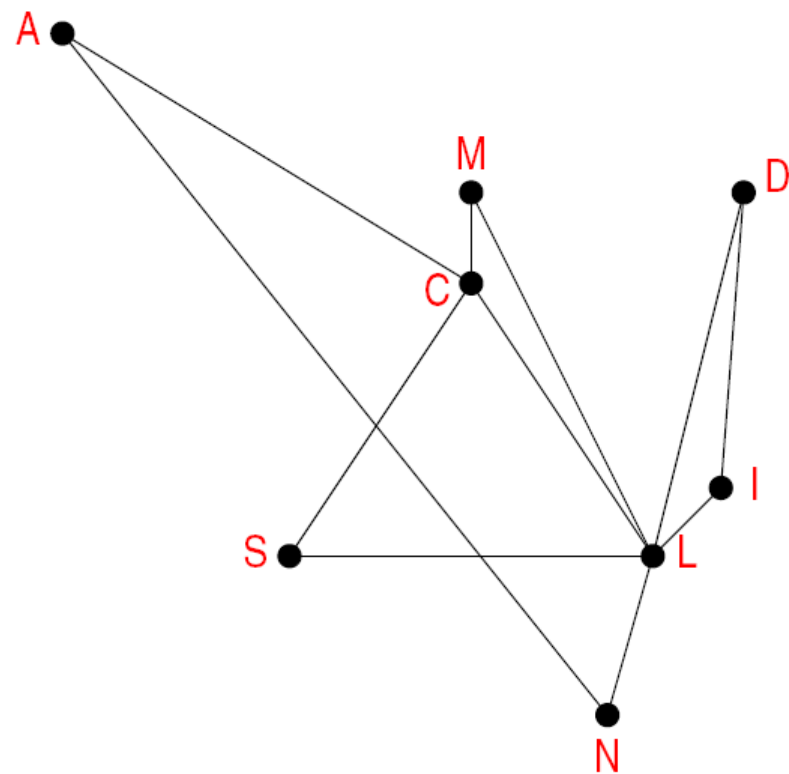
Prof. Humberto César Brandão de Oliveira

humberto@bcc.unifal-mg.edu.br

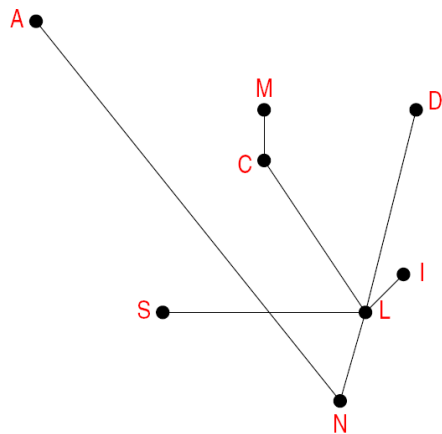
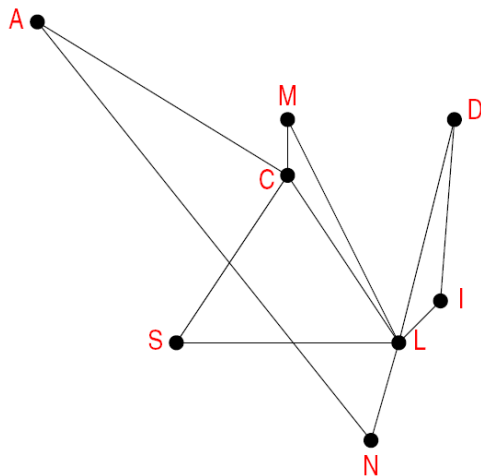


Árvore Geradora Mínima

- Suponha que uma companhia aérea recebeu **permissão** para voar nas rotas da figura...
- Mas por questões de **economia**, a empresa não irá operar em todas as vias...
- E ao mesmo tempo precisa **atender a toda a demanda** aérea do país... Afinal, os passageiros podem fazer conexões...



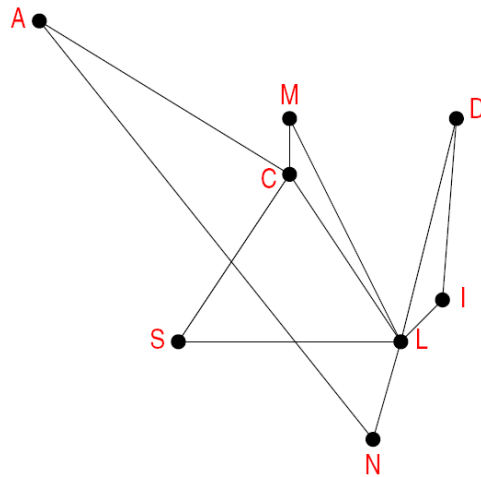
Árvore Geradora Mínima



- A segunda figura mostra uma forma de atender toda a demanda, interconectando todas as cidades.
- Este conjunto de rotas é mínimo?
 - Sem considerar os pesos...

Árvore Geradora Mínima

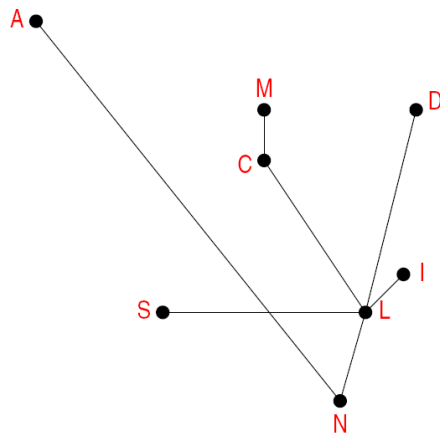
$$G = (V, A)$$



- Este conjunto de rotas é mínimo?
 - Sim. Qualquer árvore de um grafo de $|V|$ vértices possui $|V|-1$ arestas.



$$G' = (V, X)$$



$$|X| = |V| - 1$$

Árvore Geradora Mínima

- **História:**
 - O cientista checo Otakar Borůvka criou o primeiro algoritmo para encontrar uma árvore geradora mínima em 1926. Ele queria resolver o problema de encontrar uma eficiente cobertura elétrica de Moravia (Região da República Checa);
 - Atualmente este é conhecido como Algoritmo de Borůvka.

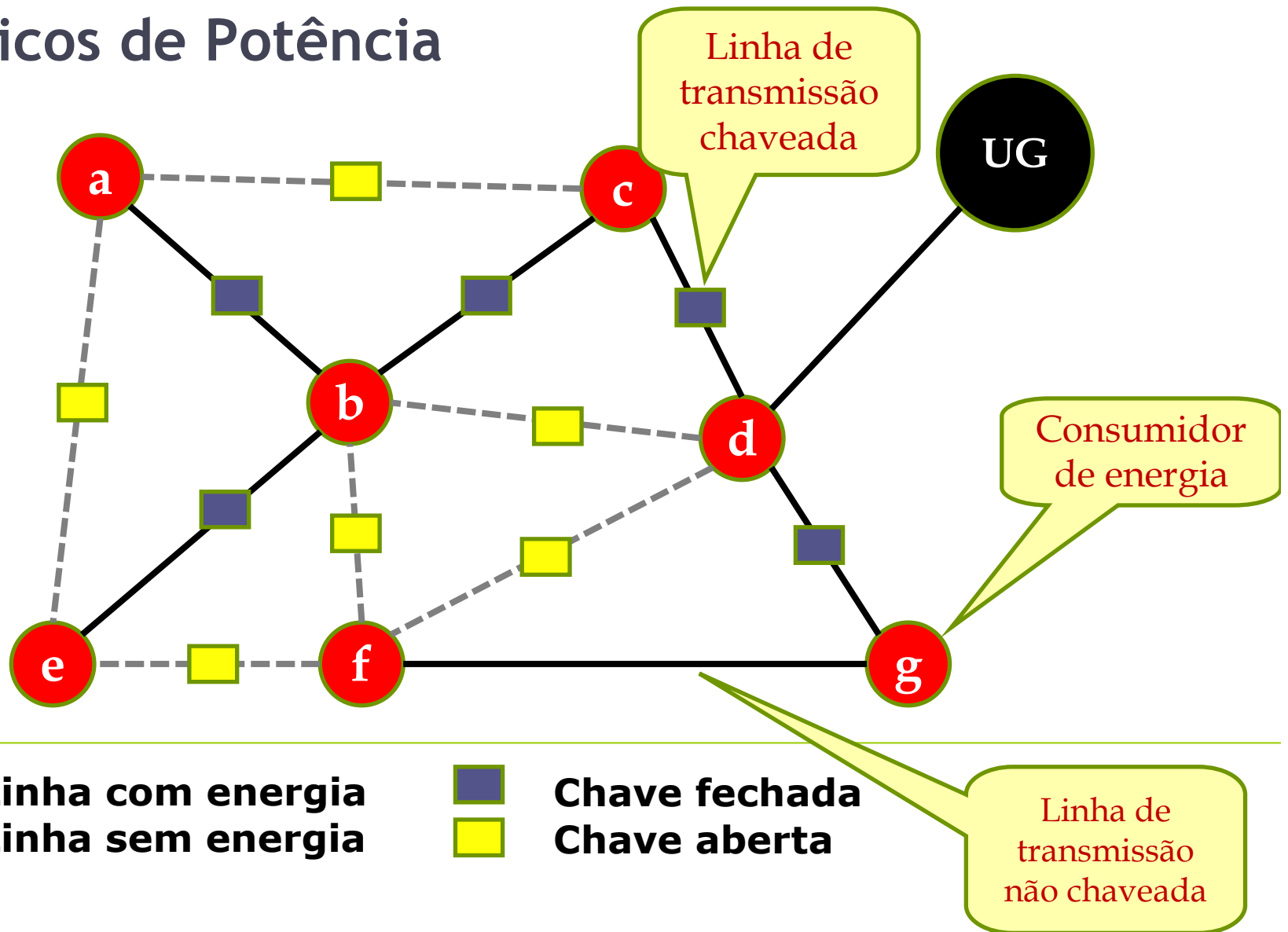


Árvore Geradora Mínima

- Aplicações da AGM:

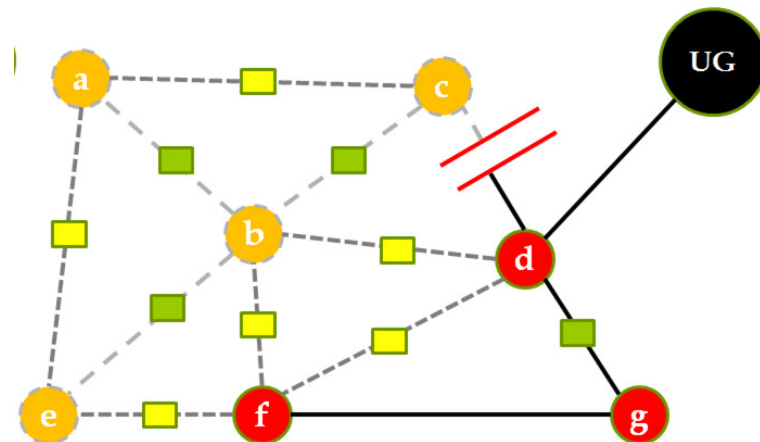
- Transporte aéreo;
- Transporte terrestre;
- Redes de computadores;
 - Exemplo: “Dynamic Minimal Spanning Tree Routing Protocol for Large Wireless Sensor Networks”:
 - http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=4026014&tag=1
- Redes elétricas;
- Circuitos integrados;
- Etc...

O Problema de Restabelecimento de Sistemas Elétricos de Potência

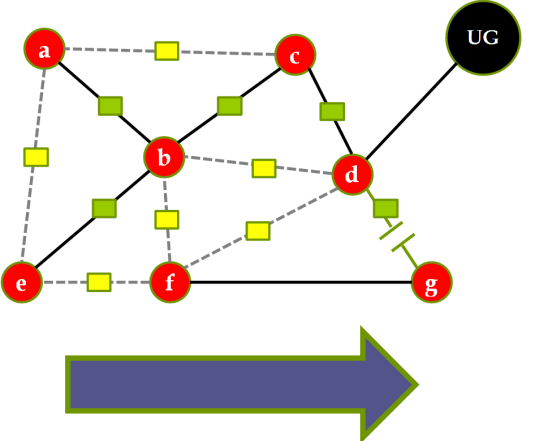
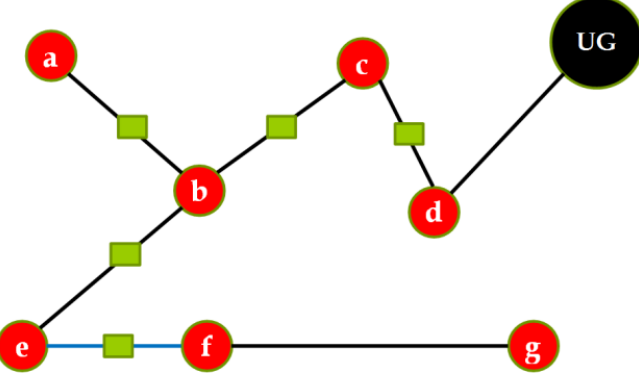
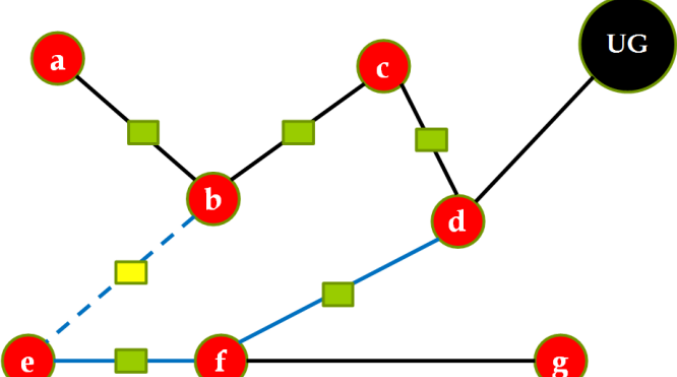
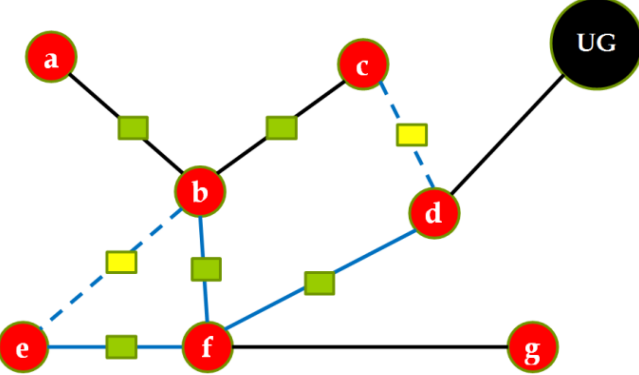
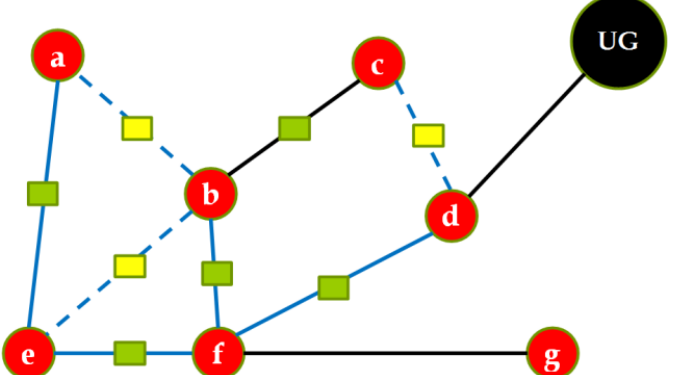


O Problema de Restabelecimento de Sistemas Elétricos de Potência

- **Deseja-se 100% de disponibilidade** do SEP;
 - Mas não podemos garantir por falhas como:
 - Catástrofes naturais;
 - Vandalismo;
- A **interrupção** de apenas **uma linha** de transmissão pode causar o **não abastecimento de grande parte dos consumidores**;



O Problema de Restabelecimento de Sistemas Elétricos de Potência

Problema	Possíveis soluções para o nosso exemplo	
	 <p data-bbox="835 917 1073 966">1 alteração</p>	 <p data-bbox="1507 917 1759 966">3 alterações</p>
	 <p data-bbox="835 1437 1073 1485">5 alterações</p>	 <p data-bbox="1522 1437 1759 1485">7 alterações</p>

Árvore Geradora Mínima

- Modelando:
 - Para cada aresta (u,v) pertencente a A , temos um **peso $w(u,v)$** especificando o custo para interconectar (u,v) . Então, desejamos encontrar um **subconjunto acíclico X** contido ou igual a A , que **conecte todos os vértices e cujo peso total seja minimizado**.

$$G = (V, A) \quad \longrightarrow \quad G' = (V, X)$$

$$\min w(X) = \sum_{(u,v) \in X} w(u,v)$$

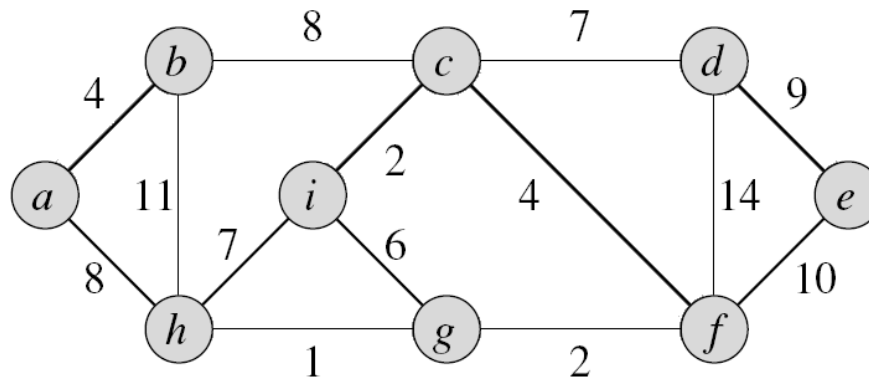
Árvore Geradora Mínima

- Observações:
 - Tendo em vista que **T é acíclico** e conecta todos os vértices, ele deve formar uma árvore, que é chamada de:
 - **Árvore geradora**, ou
 - **Árvore espalhada**, ou
 - **Árvore de extensão**;
 - O problema de determinar a árvore de menor custo é conhecido como:
 - **Problema da Árvore Geradora Mínima**, ou
 - **Problema da Árvore Espalhada Mínima**.
 - **Problema da Árvore de Extensão Mínima**.

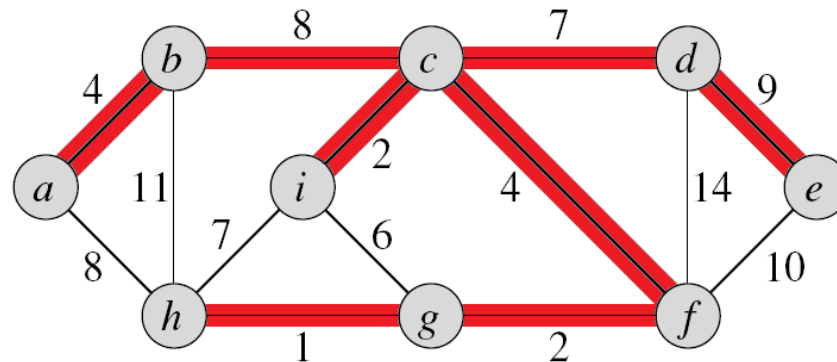
Árvore Geradora Mínima

- Exemplo:

$$G = (V, A)$$



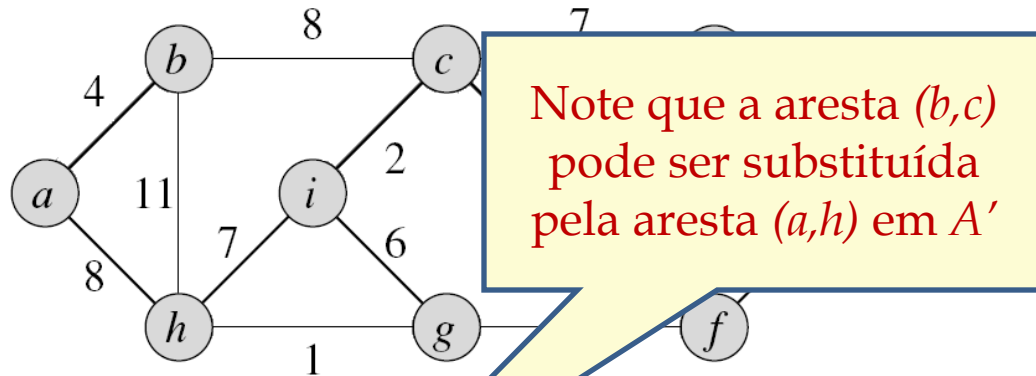
$$G' = (V, X)$$



Árvore Geradora Mínima

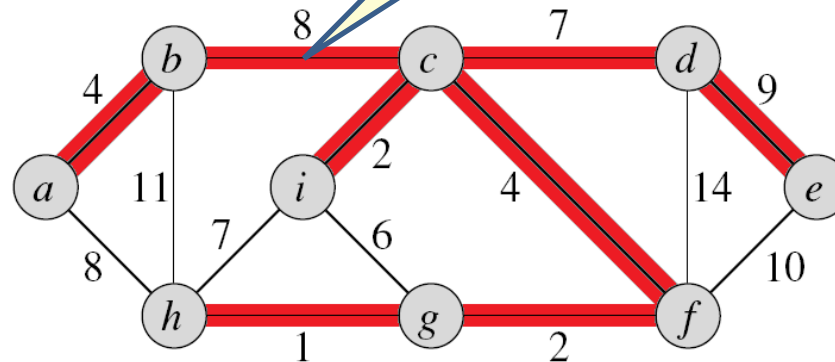
- Exemplo:

$$G = (V, A)$$



Note que a aresta (b,c) pode ser substituída pela aresta (a,h) em A'

$$G' = (V, X)$$



Árvore Geradora Mínima

- Existem dois algoritmos clássicos na literatura para resolver o problema da AGM:
 - Algoritmo de Prim;
 - Algoritmo de Kruskal;
- Ambos são considerados algoritmos gulosos.
- A estratégia gulosa defende que a menor escolha a cada passo deve ser feita, mesmo que tal escolha não nos leve a uma solução ótima ao final da execução.
 - MELHOR ESCOLHA IMEDIATA...

Árvore Geradora Mínima

- Diferente do algoritmo do caminho mínimo, os algoritmos gulosos para a árvore geradora mínima sempre encontram a solução ótima;
- Antes de estudarmos os algoritmos clássicos para a AGM, vamos focar em um algoritmo genérico, que **constrói a árvore geradora mínima adicionando uma aresta de cada vez**.

Árvore Geradora Mínima

- Grafo não orientado: $G = (V, A)$
- Peso nas arestas: $w: A \rightarrow \mathfrak{R}$
- Antes de cada iteração, **X representa o subconjunto de arestas de alguma árvore geradora mínima;**
- **A cada iteração** uma aresta (u, v) **é adicionada** ao conjunto X.
- **Problema:** Como definir qual aresta do grafo original pode fazer parte de alguma AGM?

$$X \leftarrow X \cup \{(u, v)\}$$

Árvore Geradora Mínima

- Algoritmo Genérico para AGM:

AGM _ GENERICA($G(V, A), w$)

$X \leftarrow \{ \}$

enquanto $|X| \neq (|V| - 1)$ faça

encontrar uma aresta (u, v) segura para X

$X \leftarrow X \cup \{(u, v)\}$

fim enquanto

retorna X

fim.

Árvore Geradora Mínima

- Algoritmo Genérico para AGM:

AGM _ GENERICA($G(V, A)$, w)

$X \leftarrow \{ \}$

enquanto $|X| \neq (|V| - 1)$ faça

encontrar uma aresta (u, v) segura para X

$X \leftarrow X \cup \{(u, v)\}$

fim enquanto

retorna X

fim.

É obvio que o ponto chave é a localização da aresta que pode fazer parte de alguma AGM.

Árvore Geradora Mínima

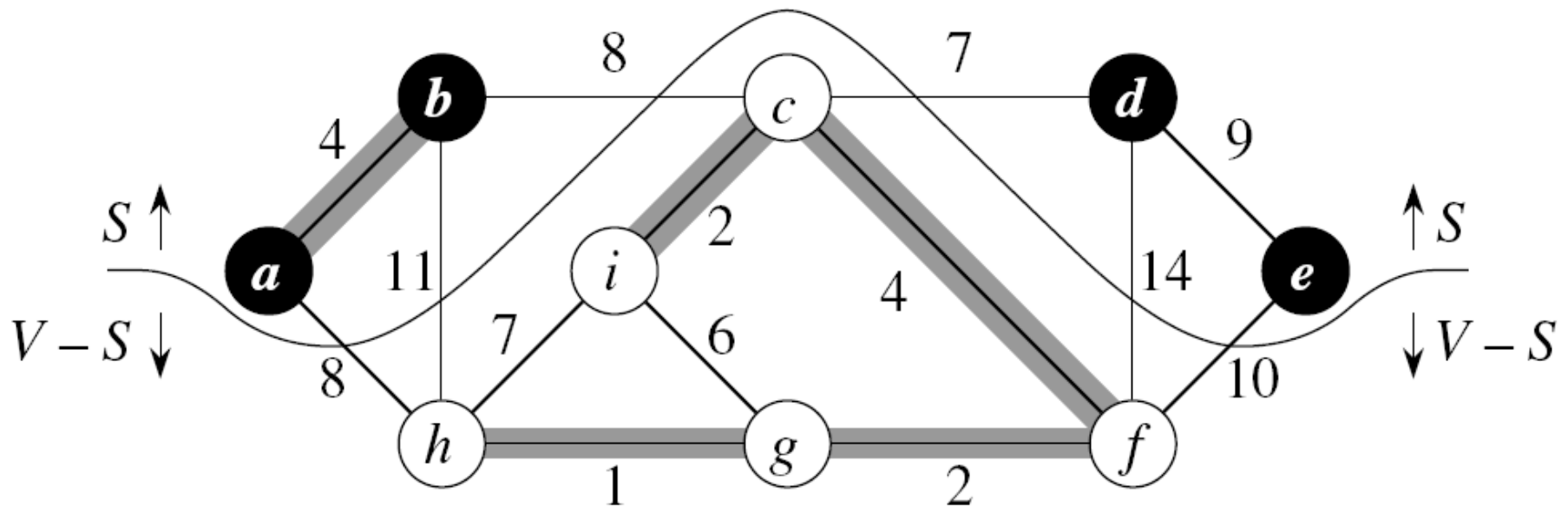
- Antes de fornecermos uma forma de identificar uma aresta segura para a AGM, precisamos de um conceito na área de grafos: corte
- Corte é uma partição é uma partição do conjunto de vértices
- Corte:

$$G = (V, A)$$

$$(S, V - S)$$

Árvore Geradora Mínima

- Primeira maneira de visualizar um corte:



$$S = \{a, b, d, e\}$$

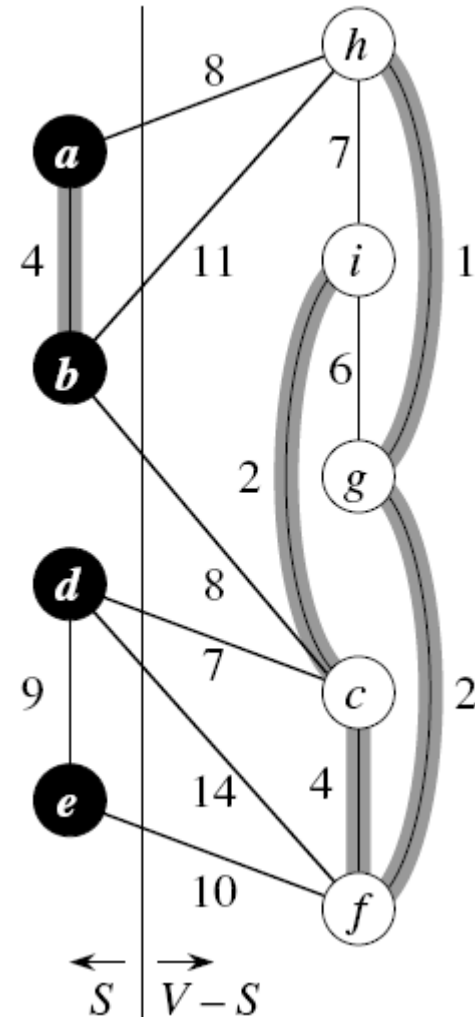
$$V - S = \{h, i, c, g, f\}$$

Árvore Geradora Mínima

- Segunda maneira de visualizar o mesmo corte:

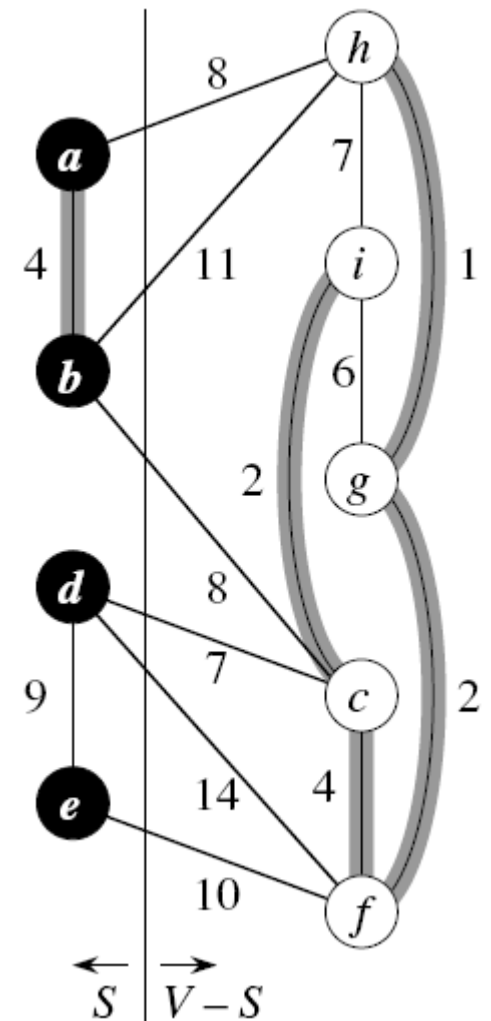
$$S = \{a, b, d, e\}$$

$$V - S = \{h, i, c, g, f\}$$



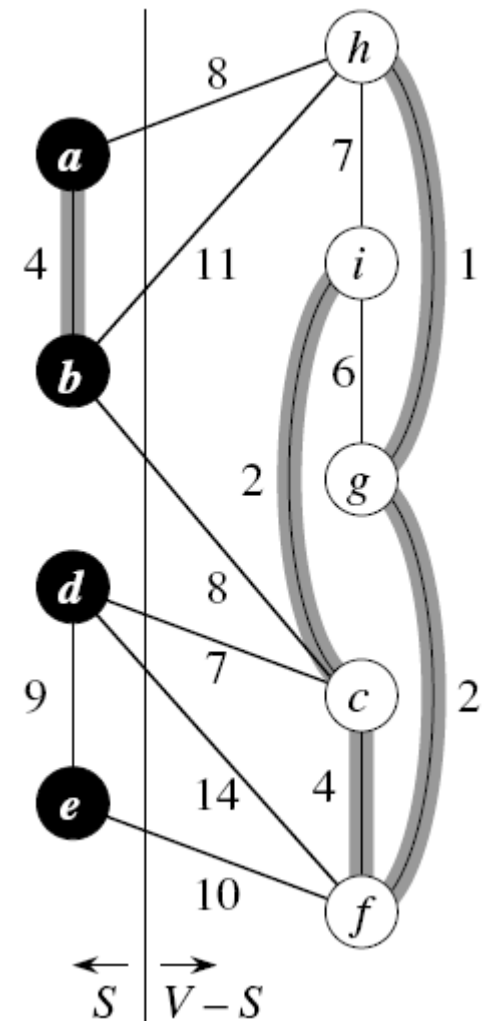
Árvore Geradora Mínima

- Definição 1:
 - ARESTA QUE CRUZA O CORTE
 - Dizemos que a aresta (u,v) cruza o corte se um dos seus pontos está em S , e o outro está em $V-S$;



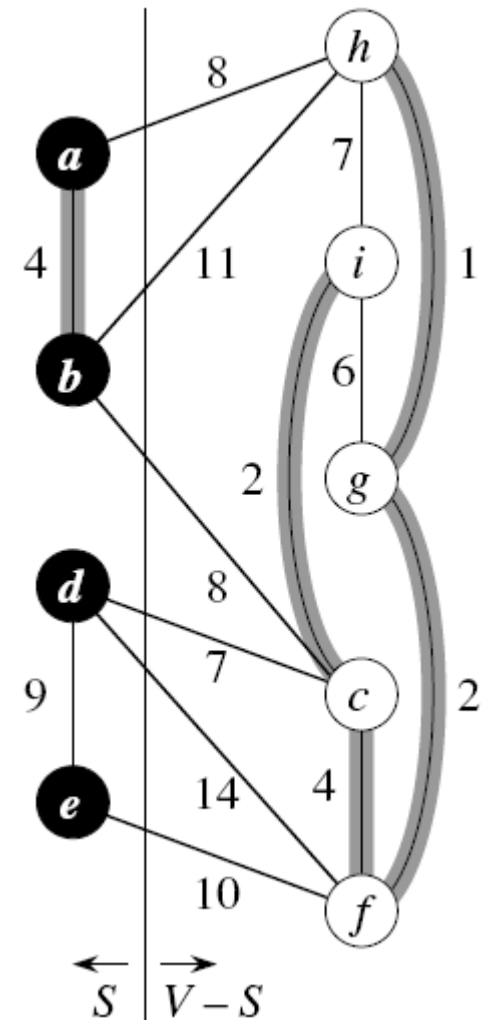
Árvore Geradora Mínima

- Definição 2:
 - CORTE RESPEITA X
 - Dizemos que um corte respeita o conjunto X se nenhuma aresta de X cruza o corte.



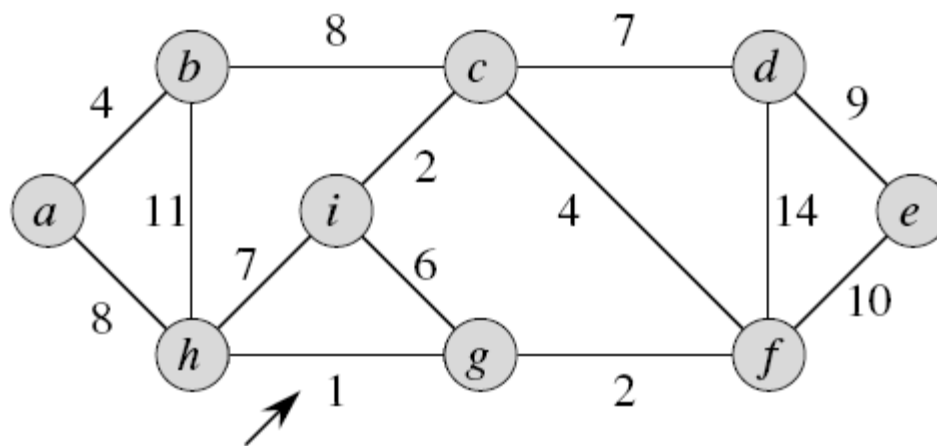
Árvore Geradora Mínima

- Definição 3:
 - ARESTA LEVE
 - Dizemos que uma aresta é uma aresta leve cruzando o corte se o seu peso é o menor, se comparado as outras arestas que cruzam o corte.



Árvore Geradora Mínima

- Questão 1:
 - Seja (u,v) uma aresta de peso mínimo em um grafo G :
 - Ela pode não pertencer a AGM?



Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.
- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;

