

Universidade Federal de Alfenas

Algoritmos em Grafos

Aula 04 – Busca em Profundidade

Prof. Humberto César Brandão de Oliveira

humberto@bcc.unifal-mg.edu.br



Última aula

- Representação computacional:
 - Matriz de adjacência;
 - Matriz de incidência;
 - Lista de adjacência.

Busca em Grafos

- Alguns **objetivos** da busca em grafos são:
 - determinar quais **vértices** são **alcançáveis** através de um vértice inicial...
 - Determinar se um determinado objeto está presente no grafo...
 - Identificar algumas características dos grafos...
- Aplicações???

Busca em Grafos

- Aplicações:
 - Compiladores;
 - Resolução de problemas (xadrez, por exemplo);
 - Este é um exemplo de uma grande classe de problemas que são resolvidos por enumeração;
 - Ou seja, busca em grafos pode auxiliar a resolver inúmeros outros problemas combinatórios;
 - Função “localizar arquivo” no sistema operacional;
 - Detecção de *deadlocks*;
 - Dentre centenas de outras aplicações....

Busca em Grafos

- Adaptações nos algoritmos de busca nos permitem construir algoritmos para os problemas de:
 - Árvore Geradora Mínima (AGM);
 - Caminho Mínimo;
 - Componentes Fortemente Conectados;
 - Ordenação Topológica.

Busca em Grafos

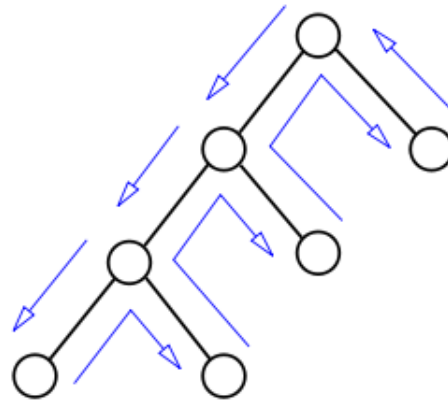
- Algoritmos clássicos de Busca:
 - Busca em Largura;
 - Busca em Profundidade;

Busca em Profundidade

A decorative horizontal line consisting of a solid teal bar at the top, followed by a white bar, and then three thin teal lines of varying lengths extending from the right side of the white bar.

Busca em Profundidade

- A **busca em profundidade** (do inglês *depth-first search* - **DFS**) é um algoritmo para caminhar no grafo;
- Seu núcleo se **concentra em buscar**, sempre que possível, **o mais fundo no grafo**.



- As arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda possui vértices adjacentes não explorados.

Busca em Profundidade

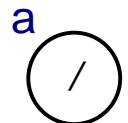
- Quando todas arestas adjacentes a v tiverem sido exploradas, a busca “anda para trás” (do inglês *backtrack*) para explorar vértices do qual v foi descoberto;
- O processo continua até que sejam descobertos todos os vértices que são alcançáveis a partir do vértice original;
- Se todos os vértices já foram descobertos, então é o fim.
- Caso contrário o processo continua a partir de um novo vértice de origem ainda não descoberto (grafos desconexos).
 - Este é um ponto diferenciado da busca em árvore que vocês já conhecem;
 - Pois ao final de uma busca simples, pode haver vértices que não foram alcançados.

Busca em Profundidade

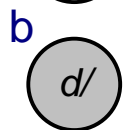
- Legenda para algoritmo:
 - Vértice Branco – Ainda não visitado...
 - Vértice cinza – Visitado, mas seus adjacentes ainda não foram todos visitados;
 - Vértice preto – Visitado, e seus adjacentes já foram todos visitados.

Busca em Profundidade

- Legenda para descoberta e finalização...



Vértice desconhecido



Vértice encontrado



Vértice encontrado, com fecho positivo totalmente visitado

- *d*: marcador do instante que o vértice *c* foi descoberto;
- *f*: marcador do instante que o fecho transitivo do vértice *c* foi totalmente visitado (considerado então finalizado).

Busca em Profundidade

DFS(G)

1 *para cada vértice* $u \leftarrow V[G]$

2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$

3 $tempo \leftarrow 0$

4 *para cada vértice* $u \in V[G]$

5 *se* $cor[u] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(u)$

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 *para cada vértice* $v \in Adj(u)$

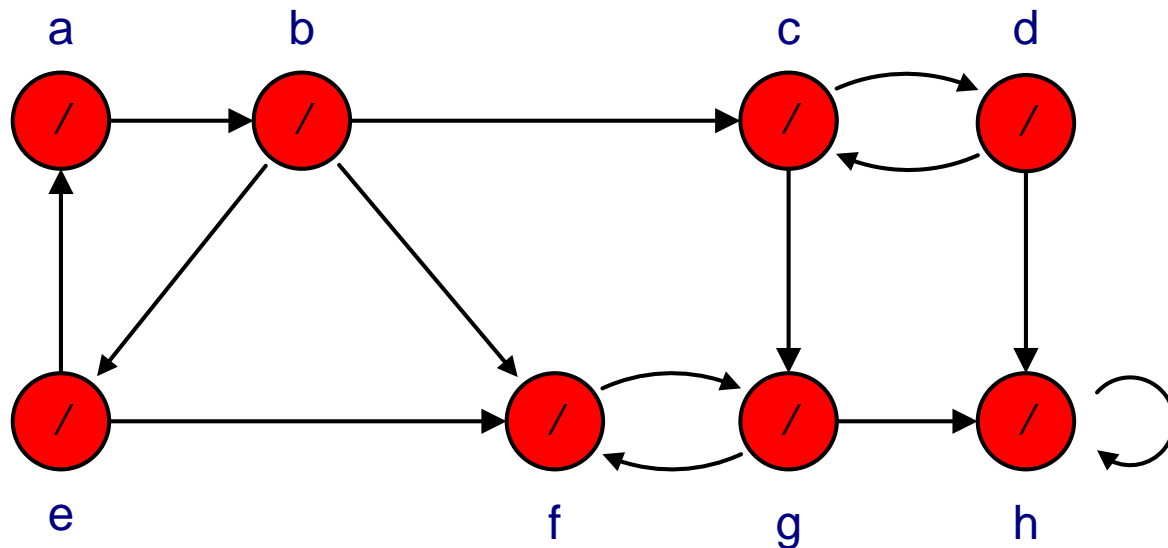
5 *se* $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Busca em Profundidade



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

DFS(G)

1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$

2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$

3 $tempo \leftarrow 0$

4 para cada vértice $u \in V[G]$

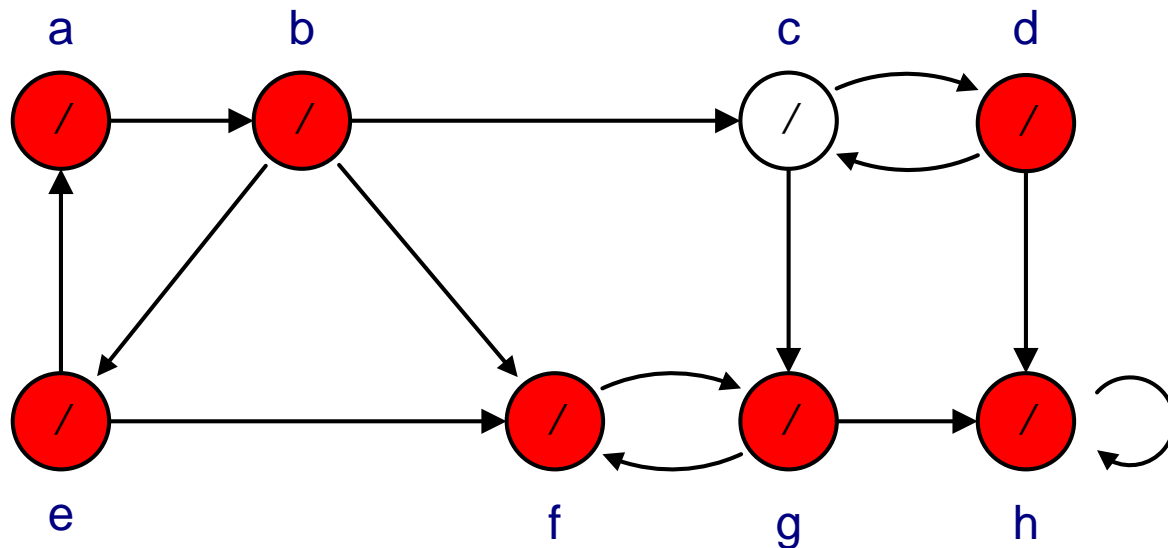
5 se $cor[u] = BRANCO$

6 $DFS-VISIT(u)$

- Dado um Grafo, temos uma lista de todos os vértices...

Busca em Profundidade

- Linha 2: Colorindo vértice **c** de BRANCO;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

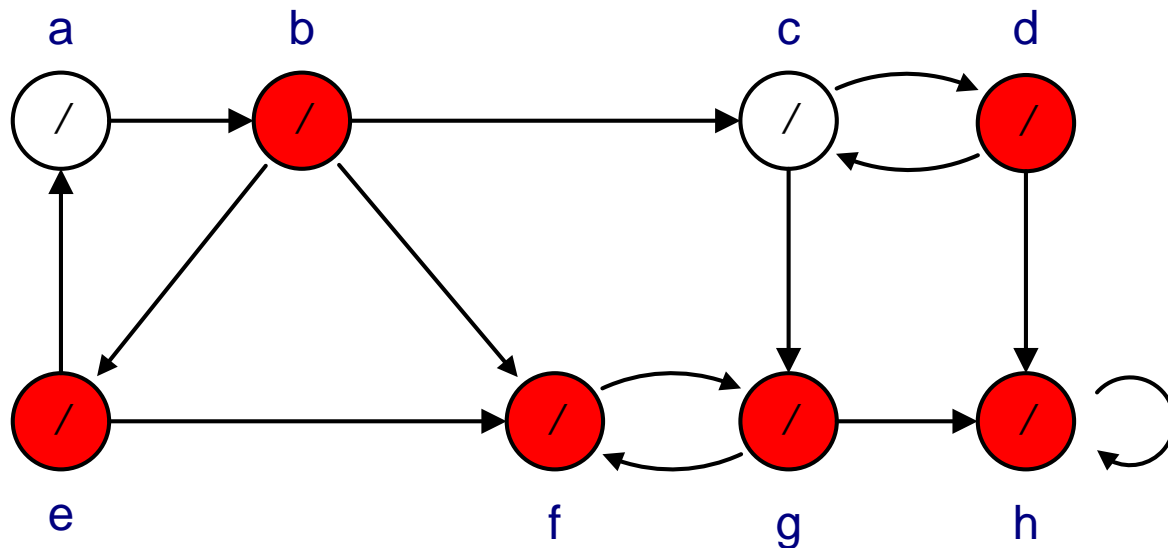


DFS(G)

- 1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$
- 2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$
- 3 $tempo \leftarrow 0$
- 4 para cada vértice $u \in V[G]$
- 5 se $cor[u] = BRANCO$
- 6 $DFS-VISIT(u)$

Busca em Profundidade

- Linha 2: Colorindo vértice **a** de BRANCO;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

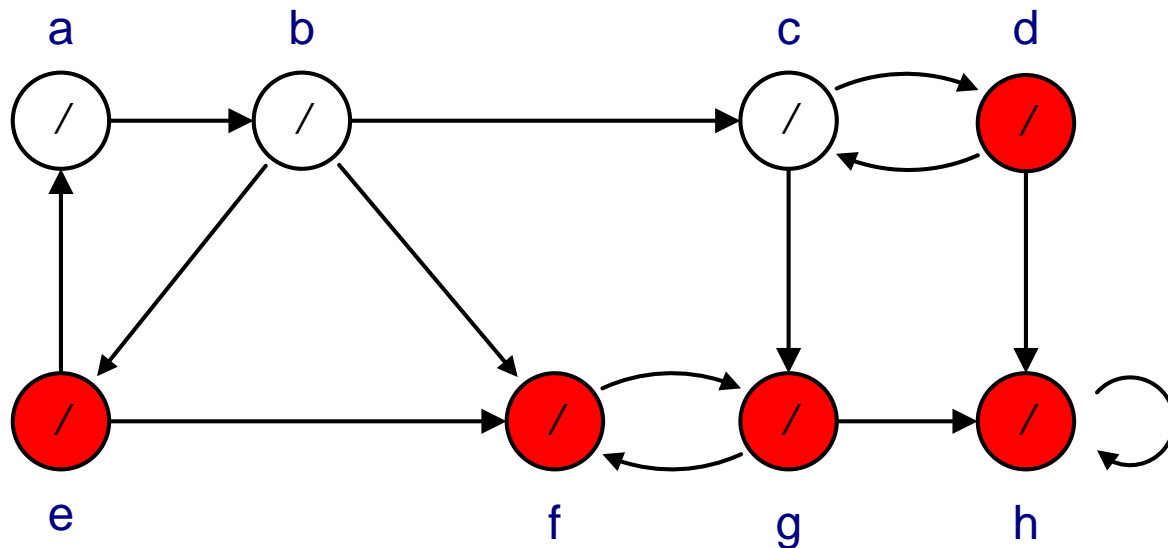


DFS(G)

- 1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$
- 2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$
- 3 $tempo \leftarrow 0$
- 4 para cada vértice $u \in V[G]$
- 5 se $cor[u] = BRANCO$
- 6 $DFS-VISIT(u)$

Busca em Profundidade

- Linha 2: Colorindo vértice **b** de BRANCO;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

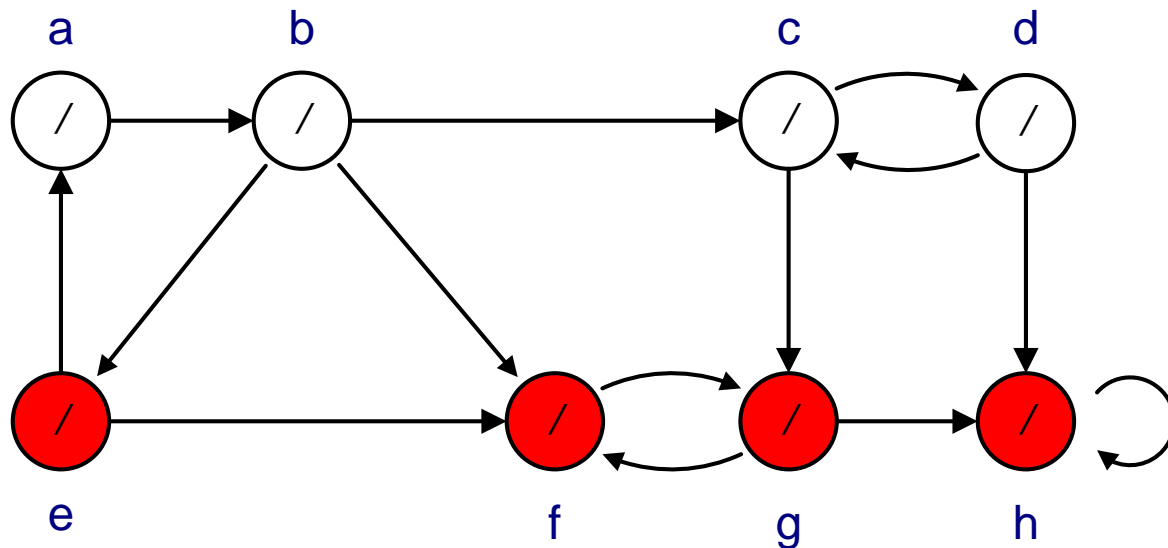


DFS(G)

- 1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$
- 2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$
- 3 $tempo \leftarrow 0$
- 4 para cada vértice $u \in V[G]$
- 5 se $cor[u] = BRANCO$
- 6 $DFS-VISIT(u)$

Busca em Profundidade

- Linha 2: Colorindo vértice **d** de BRANCO;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

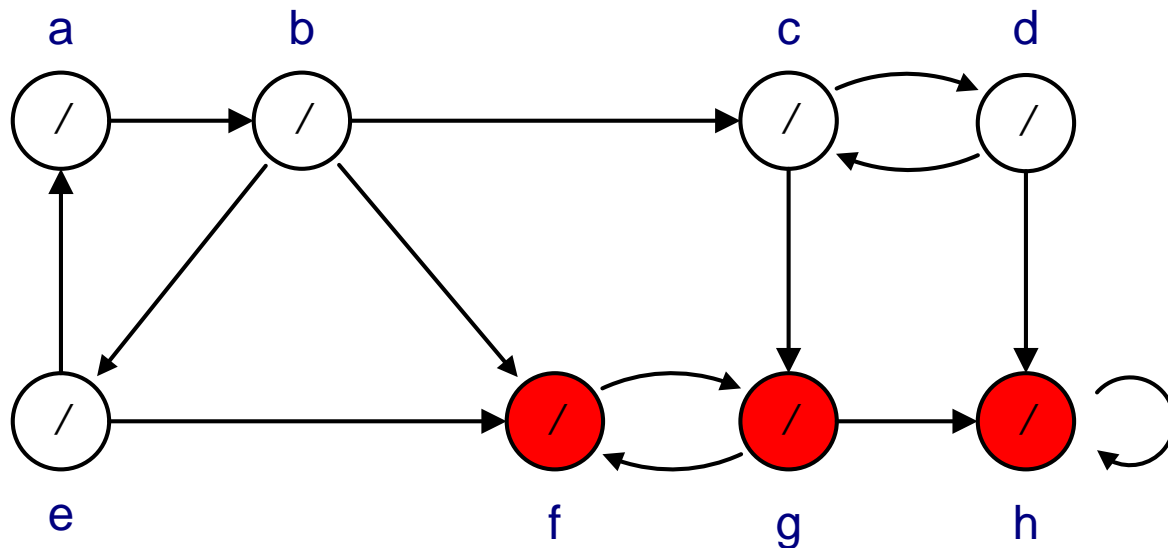


DFS(G)

- 1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$
- 2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$
- 3 $tempo \leftarrow 0$
- 4 para cada vértice $u \in V[G]$
- 5 se $cor[u] = BRANCO$
- 6 $DFS-VISIT(u)$

Busca em Profundidade

- Linha 2: Colorindo vértice **e** de BRANCO;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

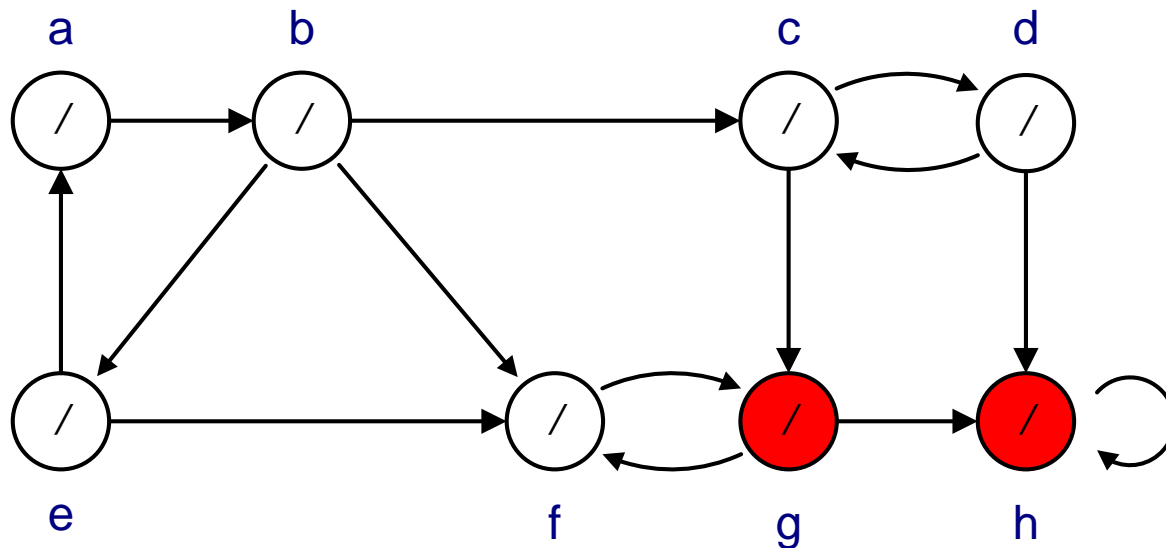


DFS(G)

- 1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$
- 2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$
- 3 $tempo \leftarrow 0$
- 4 para cada vértice $u \in V[G]$
- 5 se $cor[u] = BRANCO$
- 6 $DFS-VISIT(u)$

Busca em Profundidade

- Linha 2: Colorindo vértice **f** de BRANCO;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

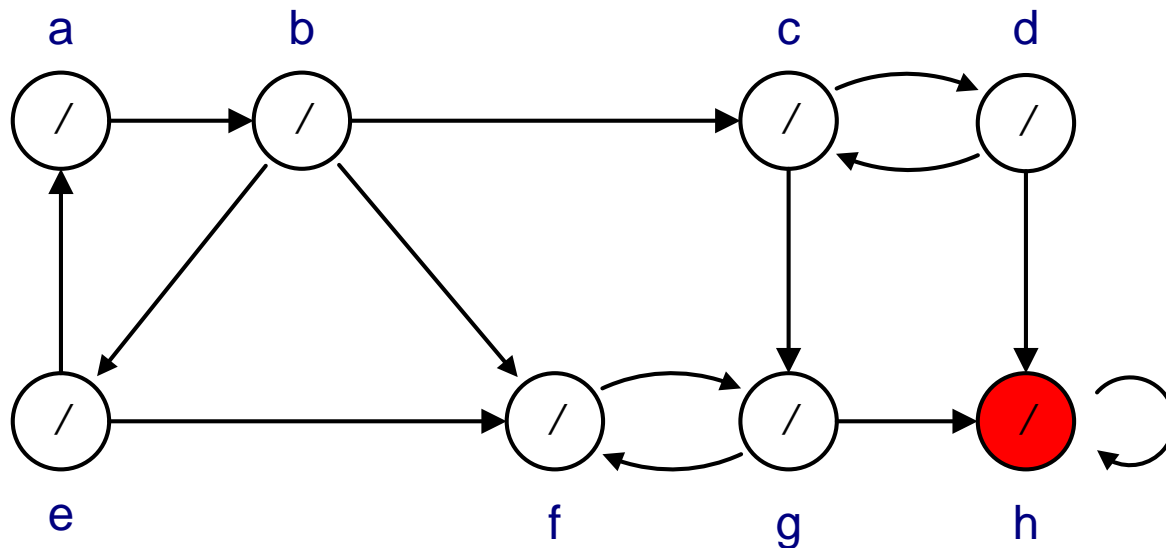


DFS(G)

- 1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$
- 2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$
- 3 $tempo \leftarrow 0$
- 4 para cada vértice $u \in V[G]$
- 5 se $cor[u] = BRANCO$
- 6 $DFS-VISIT(u)$

Busca em Profundidade

- Linha 2: Colorindo vértice **g** de BRANCO;



Lista: [c, a, b, d, e, f, g, h]

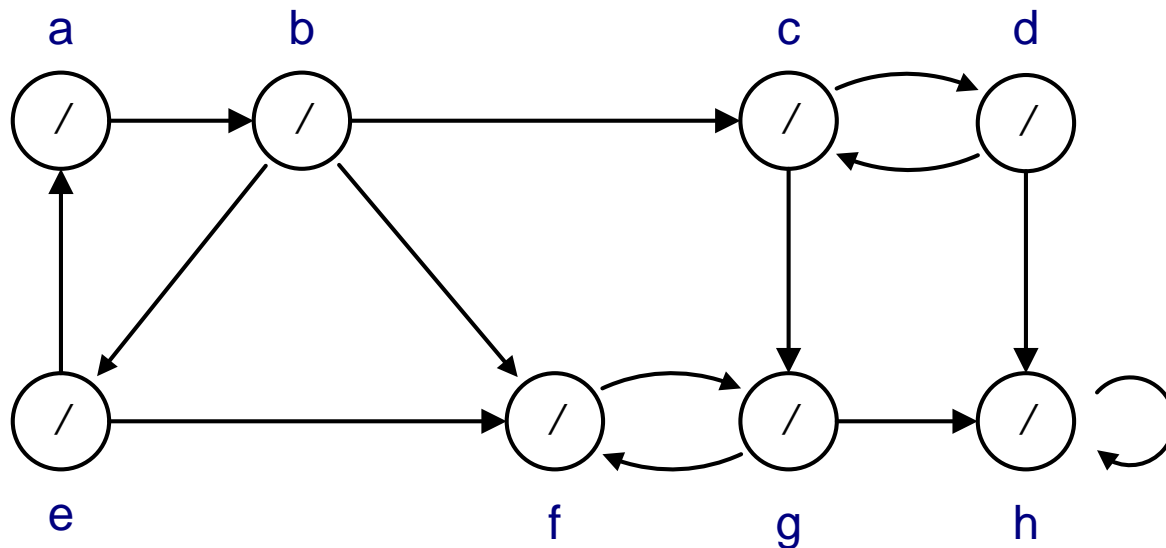


DFS(G)

- 1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$
- 2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$
- 3 $tempo \leftarrow 0$
- 4 para cada vértice $u \in V[G]$
- 5 se $cor[u] = BRANCO$
- 6 $DFS-VISIT(u)$

Busca em Profundidade

- Linha 2: Colorindo vértice **h** de BRANCO;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

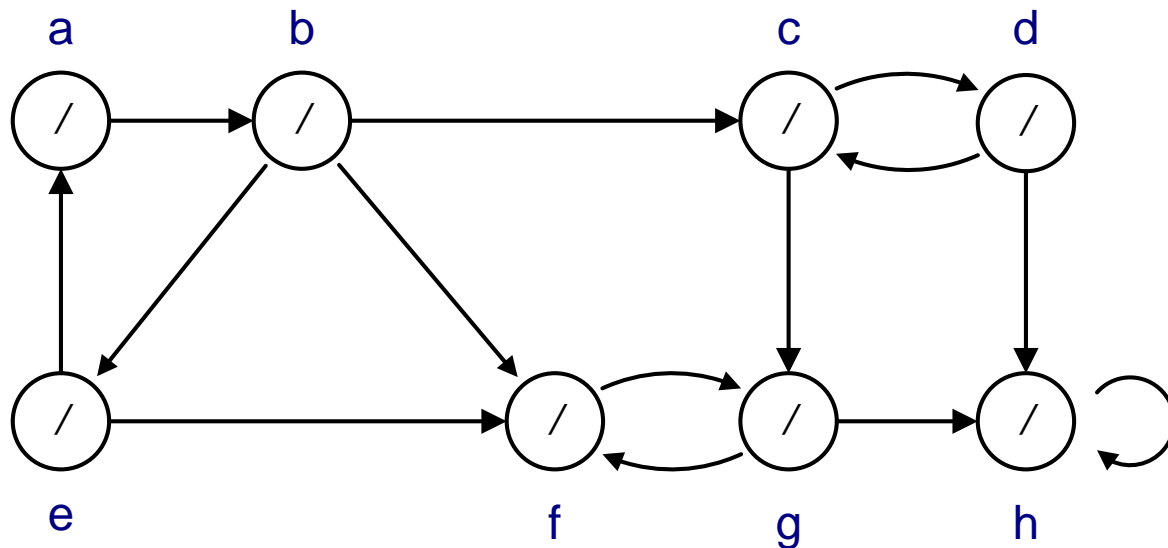


DFS(G)

- 1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$
- 2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$
- 3 $tempo \leftarrow 0$
- 4 para cada vértice $u \in V[G]$
- 5 se $cor[u] = BRANCO$
- 6 $DFS-VISIT(u)$

Busca em Profundidade

- Inicializando variável *tempo*;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

DFS(G)

1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$

2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$

3 $tempo \leftarrow 0$

4 para cada vértice $u \in V[G]$

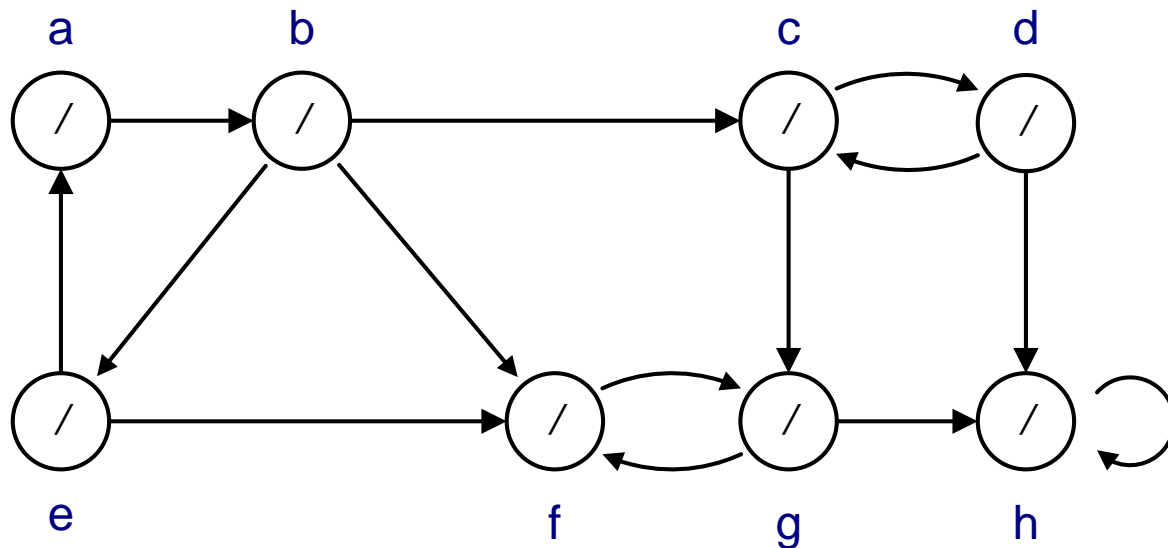
5 se $cor[u] = BRANCO$

6 $DFS-VISIT(u)$

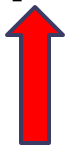
$tempo = 0$

Busca em Profundidade

- Para todos os vértices do grafo...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]



tempo = 0

DFS(G)

1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$

2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$

3 $tempo \leftarrow 0$

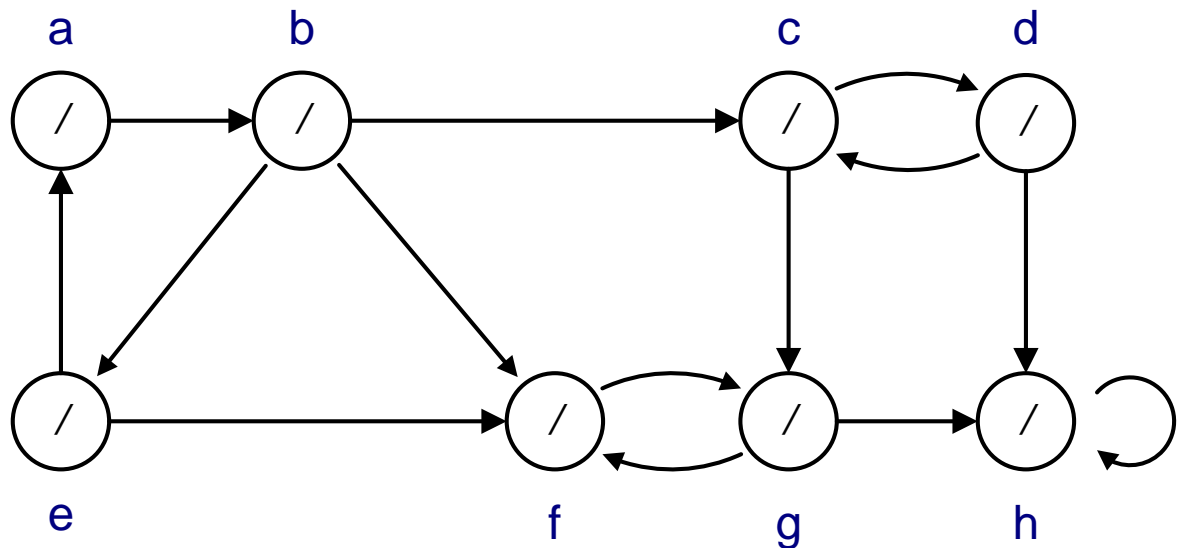
 4 para cada vértice $u \in V[G]$

5 se $cor[u] = BRANCO$

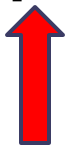
6 $DFS-VISIT(u)$

Busca em Profundidade

- A cor do vértice **c** é BRANCA?



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]



tempo = 0

DFS(G)

1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$

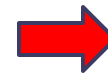
2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$

3 $tempo \leftarrow 0$

4 para cada vértice $u \in V[G]$

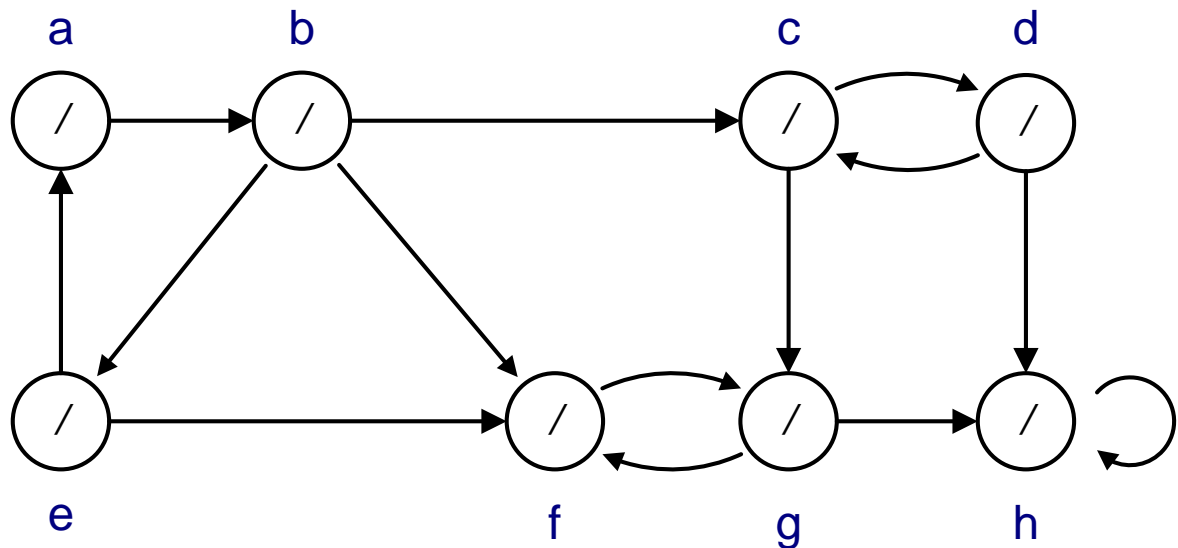
5 se $cor[u] = BRANCO$

6 $DFS-VISIT(u)$



Busca em Profundidade

- Chamada de função: **DFS_VISIT(c)**;
- Vai empilhar a função DFS(G), com o $CP = 4$, e próximo $u=a$;



DFS(G)

1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$

2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$

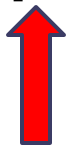
3 $tempo \leftarrow 0$

4 para cada vértice $u \in V[G]$

5 se $cor[u] = BRANCO$

6 $DFS_VISIT(u)$

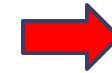
Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]



tempo = 0

Busca em Profundidade

- Chamada de função: **DFS_VISIT(c)**;



DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

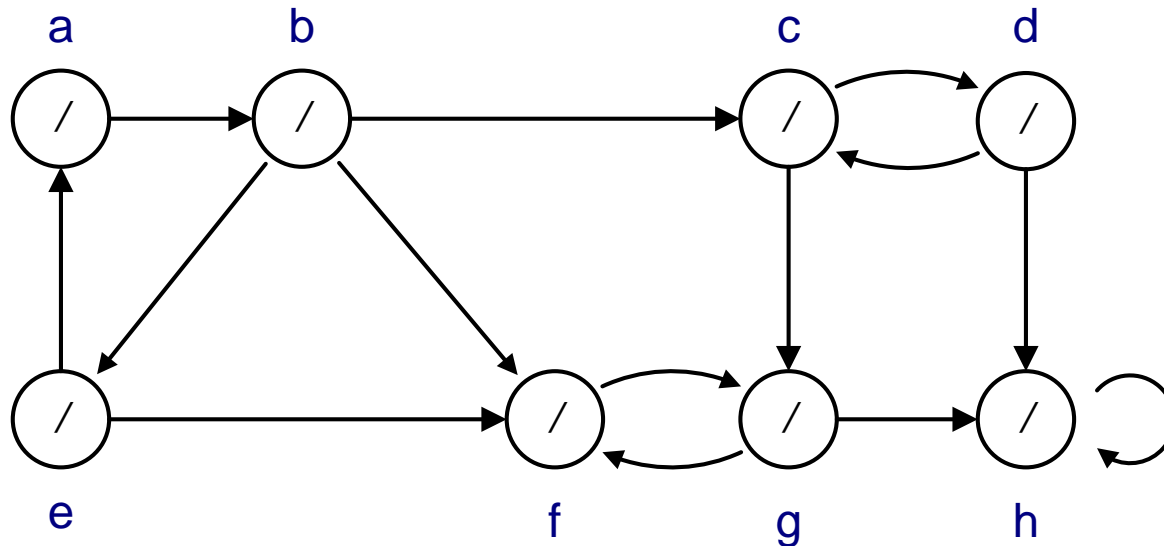
4 para cada $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

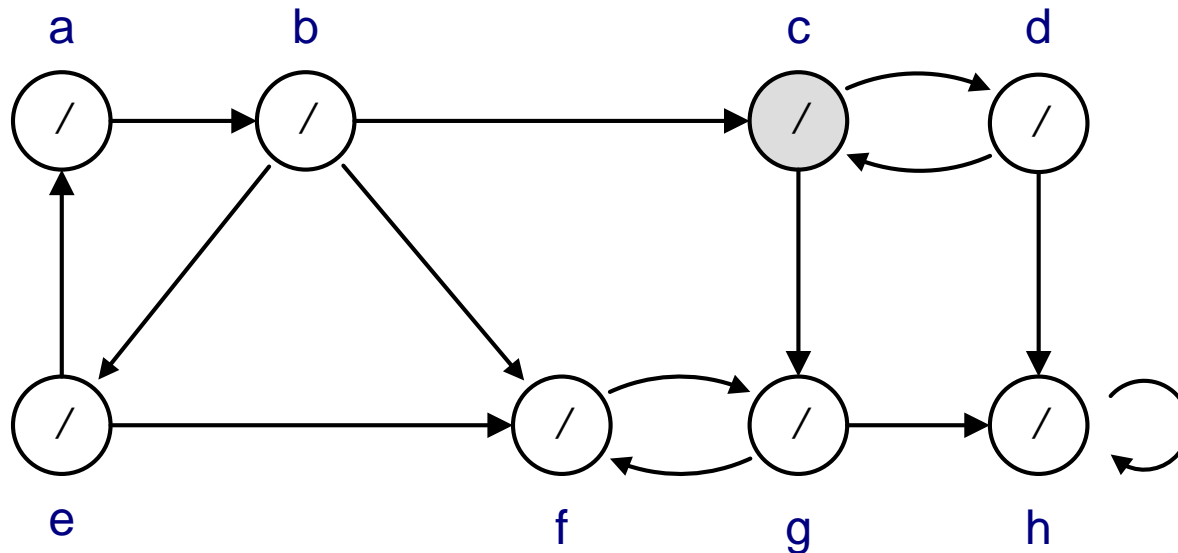
Pilha de execução:

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

tempo = 0

Busca em Profundidade

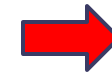
- Colore **c** de cinza;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 0

DFS - VISIT(u)



1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

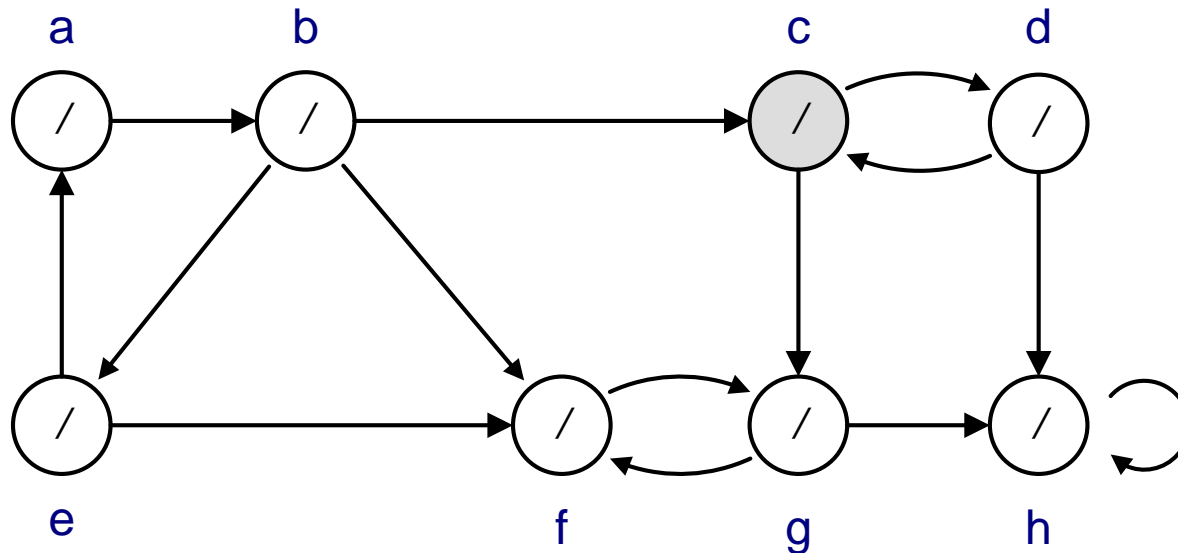
8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- Colore **c** de cinza;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

Pilha de execução:

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = a

tempo = 0 => 1

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$



2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

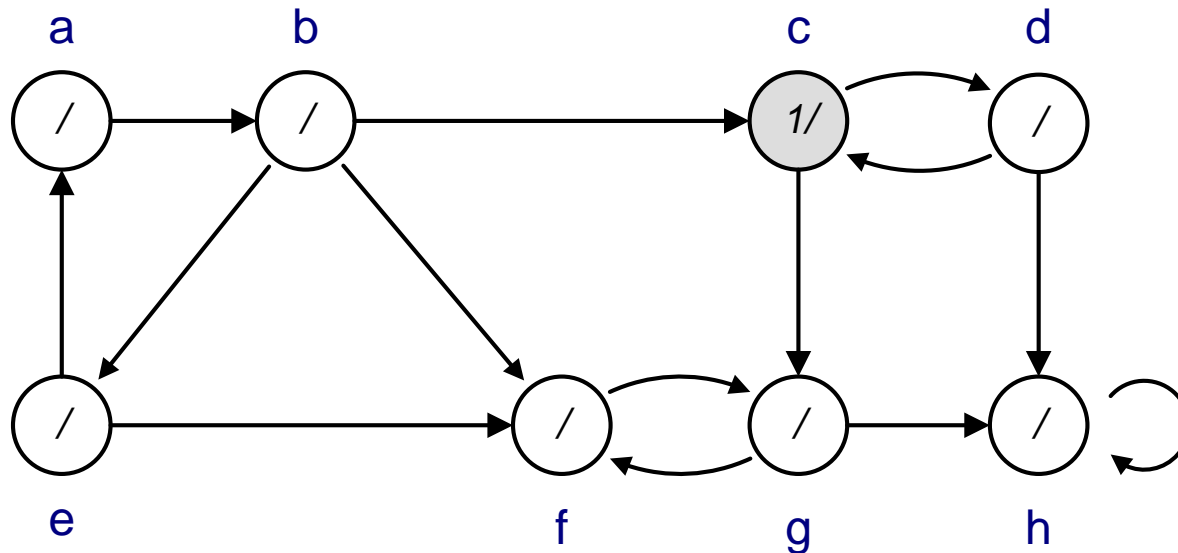
6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Busca em Profundidade

- Colore **c** de cinza;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 1

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

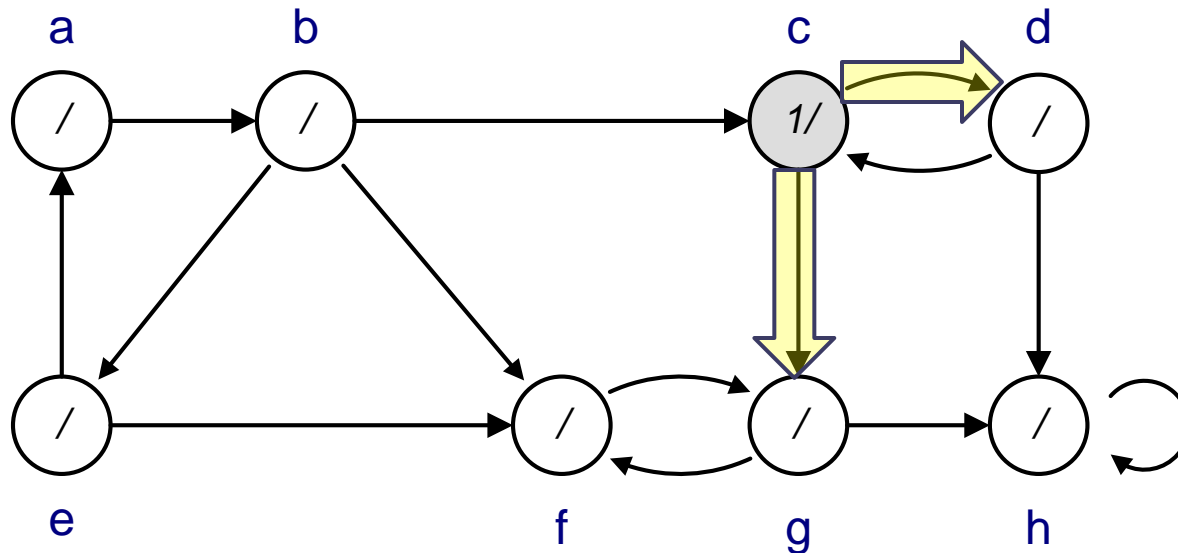
8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- Como não sabemos qual a representação computacional utilizada, vamos considerar primeiro g, depois d.



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 1

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

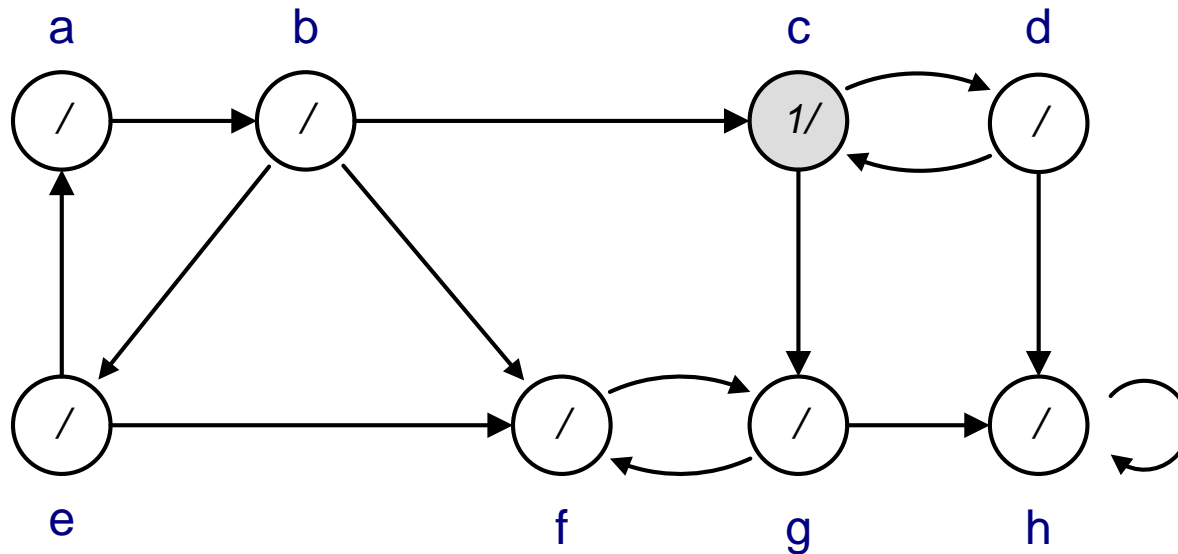
8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- A cor de **g** é BRANCA?



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 1

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

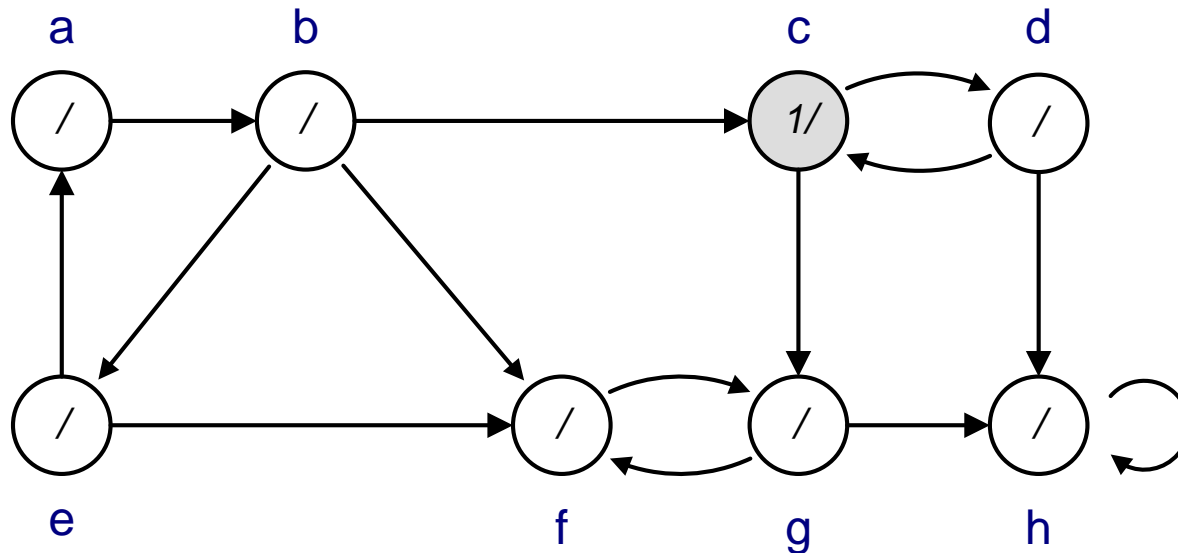
8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- Chama a função `DFS_VISIT(g)`
- Vai empilhar `DFS_VISIT(c)`, `CP = 4`



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 1

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

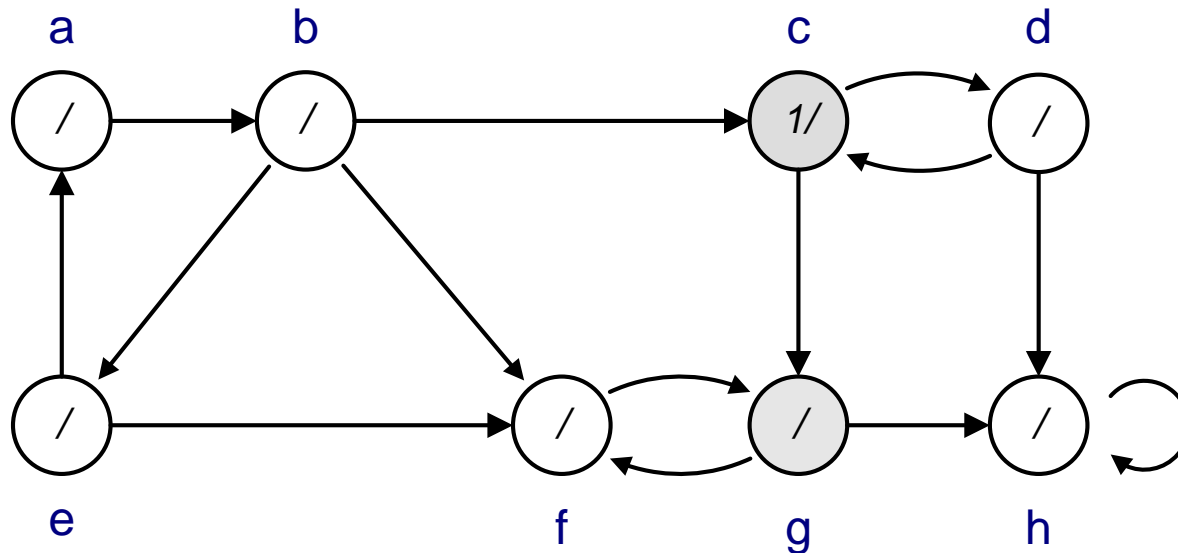
8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- Colore g de cinza



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 1

DFS - VISIT(u)



1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

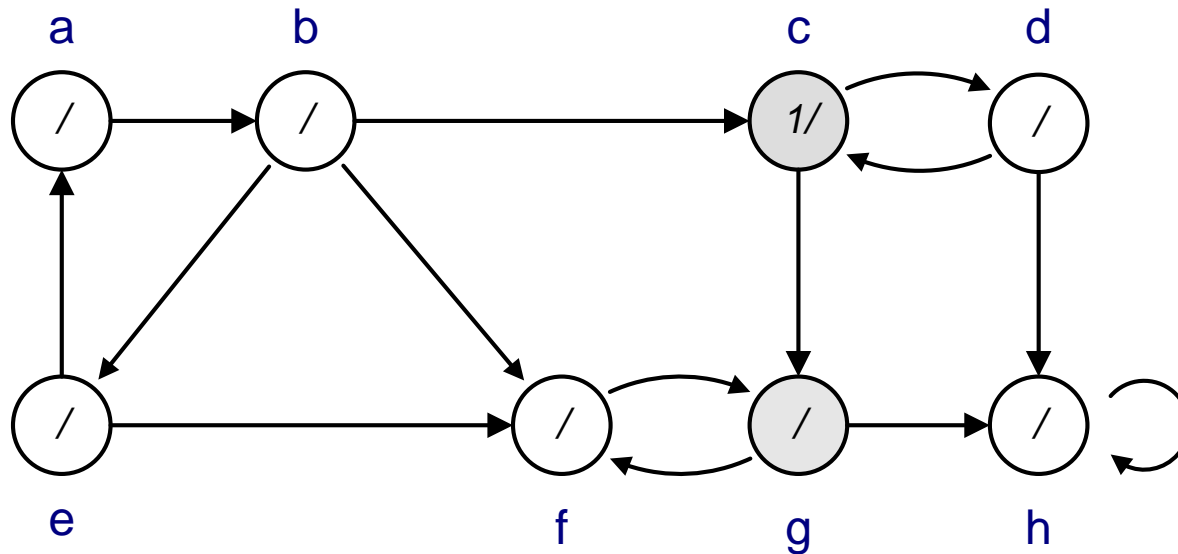
Pilha de execução:

DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = a

Busca em Profundidade

- Incremento no tempo: 2



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$



2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

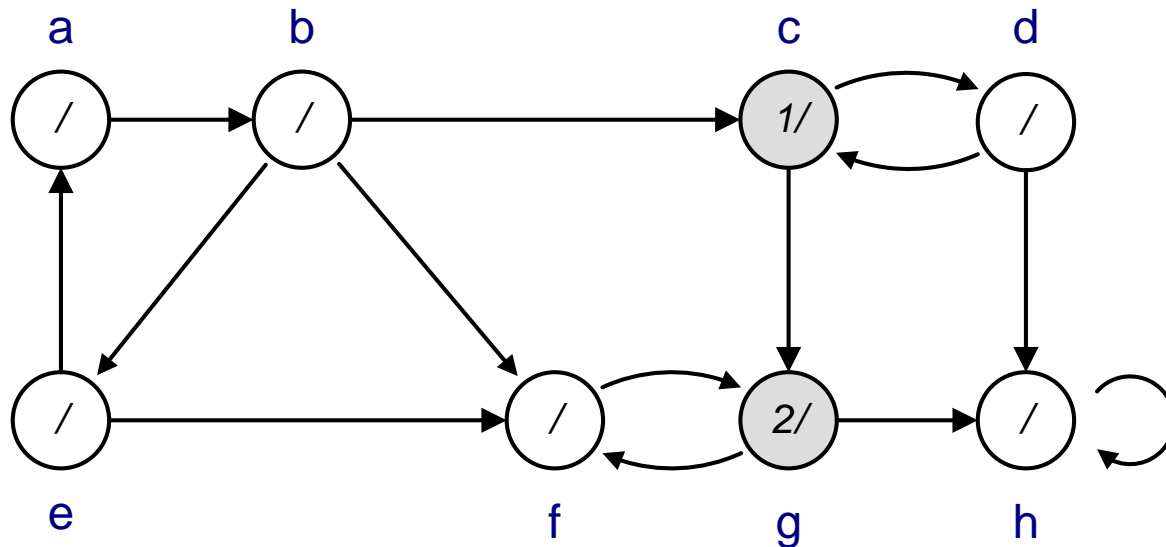
DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

tempo = 1 => 2

Busca em Profundidade

- Indica o tempo de descoberta do vértice g



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 2

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

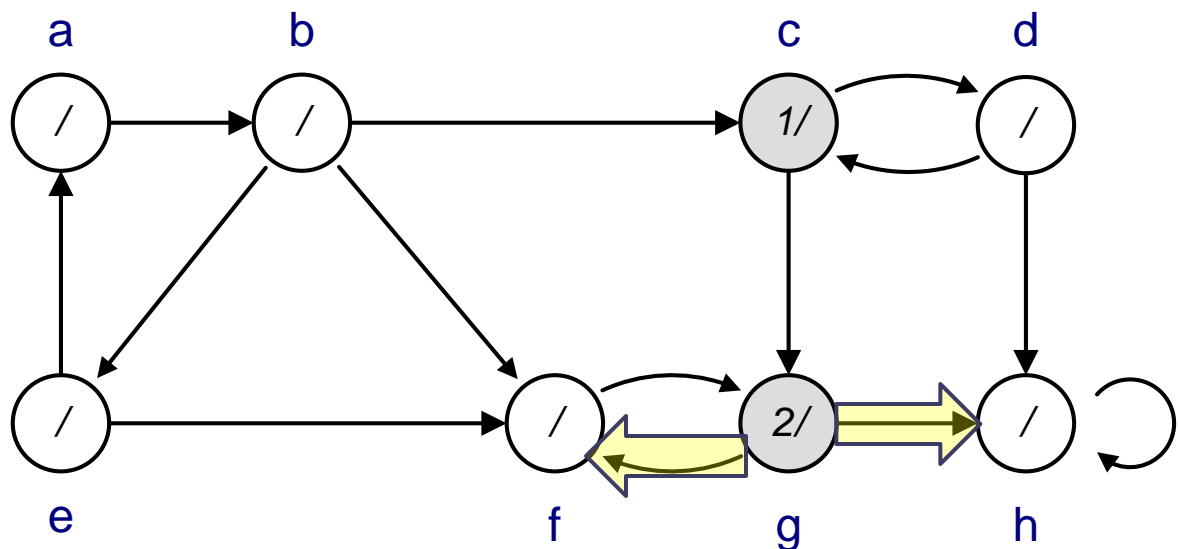
Pilha de execução:

DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- Para cada adjacente do vértice $g = \{f, h\}$



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 2

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 **→** para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

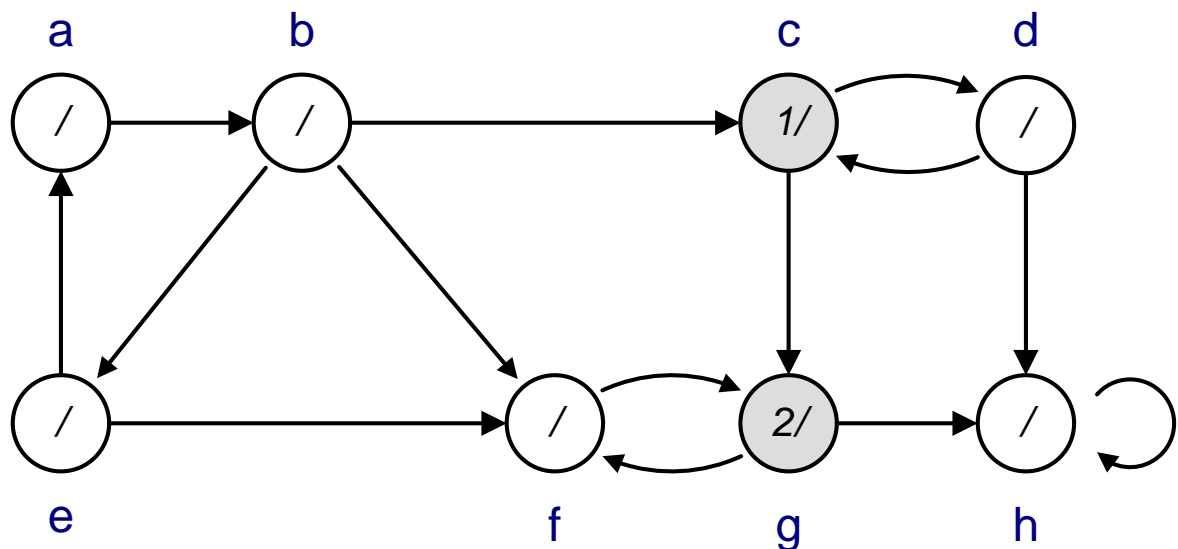
Pilha de execução:

DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- A cor do vértice f é BRANCA?
 - Então, invoca `DFS_VISIT(f)`;
 - Empilha `DFS_VISIT(g)`, CP: 4 – próximo: $v=h$



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 2

DFS – VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS – VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

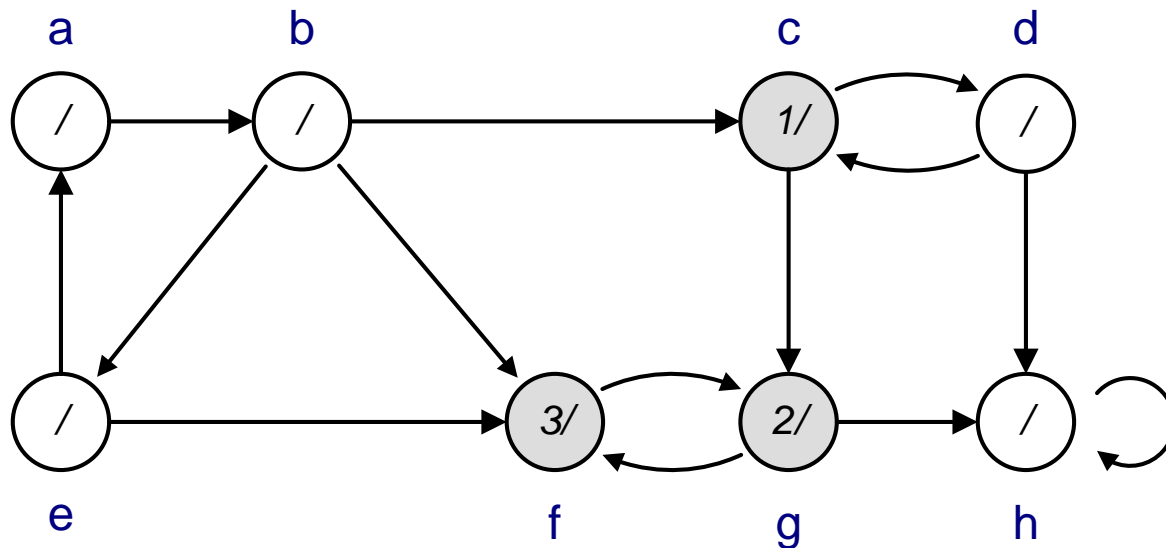
Pilha de execução:

`DFS_VISIT(c)`, CP: linha 4

`DFS(G)` - CP: linha 4 – próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- Marca o vértice f como CINZA.
Incrementa o Tempo.
- Indica o tempo de descoberta do vértice f



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 2 => 3

DFS - VISIT(u)



1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

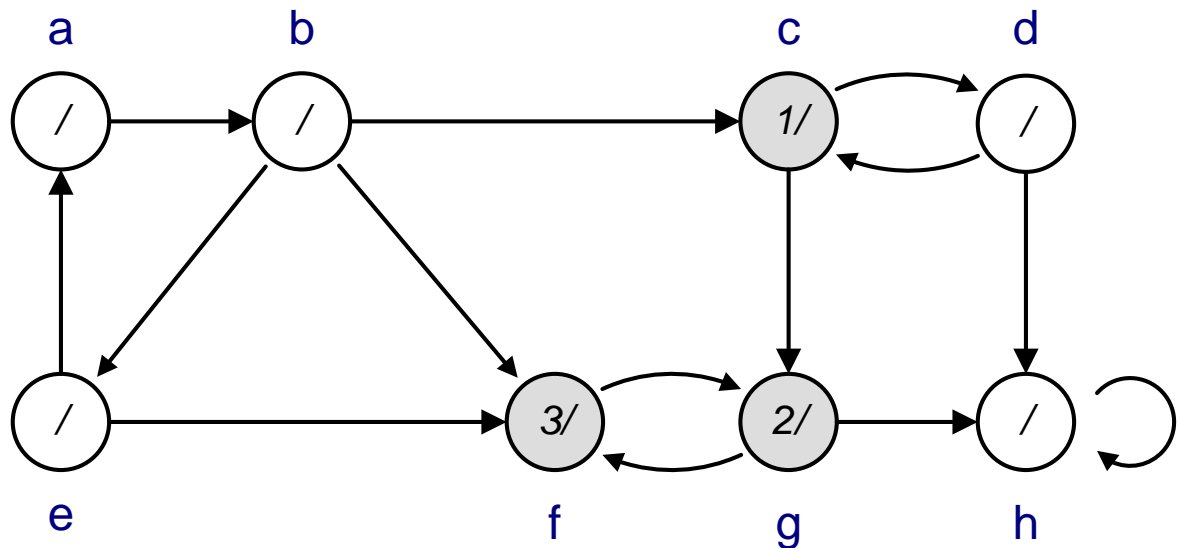
DFS_VISIT(g), CP: linha 4

DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- O vértice f possui apenas um adjacente: {g}
- g não é BRANCO;



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 3

DFS - VISIT(u)

1 *cor[u] ← CINZA*

2 *tempo ← tempo + 1*

3 *d[u] ← tempo*

4 *para cada vértice v ∈ Adj(u)*

5 *se cor[v] = BRANCO*

6 *DFS - VISIT(v)*

7 *cor[u] ← PRETO*

8 *f[u] ← tempo ← (tempo + 1)*

Pilha de execução:

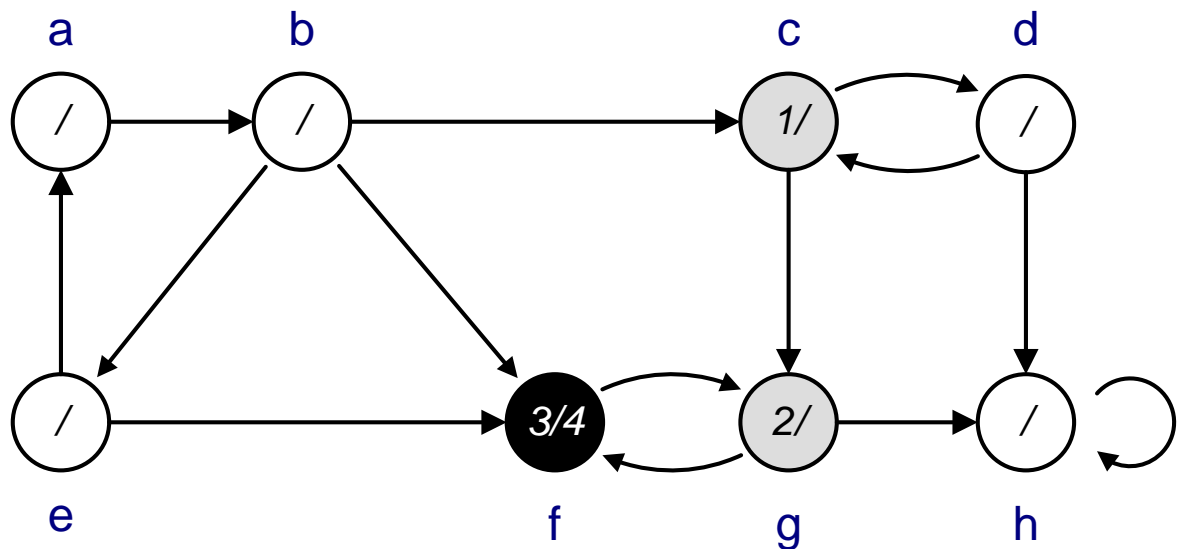
DFS_VISIT(g), CP: linha 4

DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = a

Busca em Profundidade

- O laço termina, f recebe a cor preta; Incrementa o tempo; É indicado o tempo de finalização de f;
- A função termina... Agora, e a última chamada é desempilhada.



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 3 => 4

DFS – VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS – VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

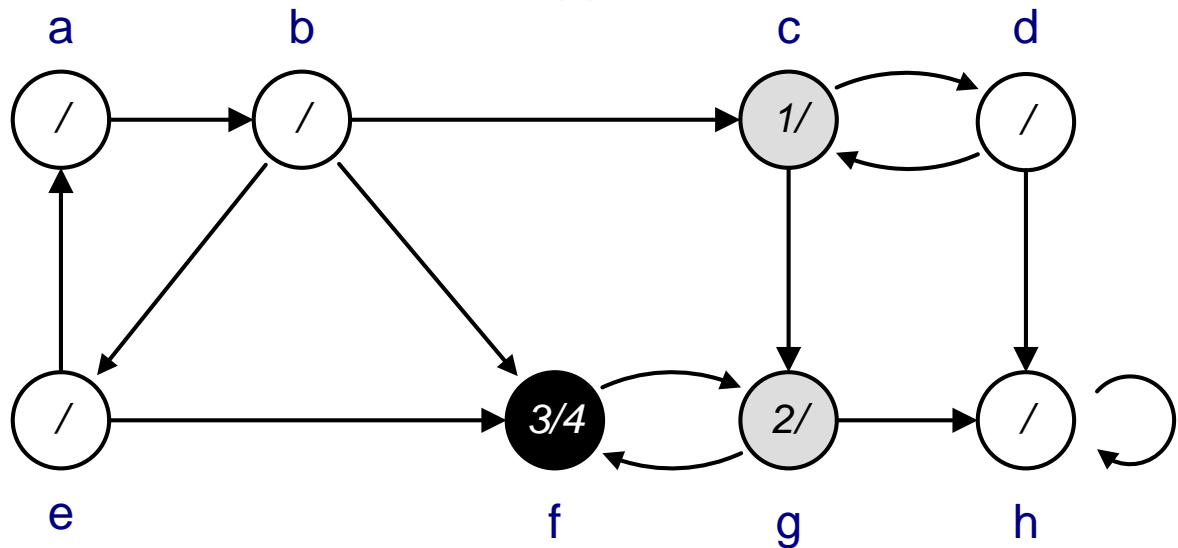
DFS_VISIT(g), CP: linha 4

DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = a

Busca em Profundidade

- Desempilhou: **DFS_VISIT(g)**, CP: linha 4
- O próximo adjacente de g é h, e ele é BRANCO...
- Assim, empilha novamente DFS_VISIT(g), CP: linha 4
- E chama DFS_VISIT(h)



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 4

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 **para cada** $v \in Adj(u)$

5 **se** $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = a

Busca em Profundidade

- Colore o vértice h de cinza, incrementa uma unidade de tempo, e indica o tempo que o vértice h foi localizado...

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

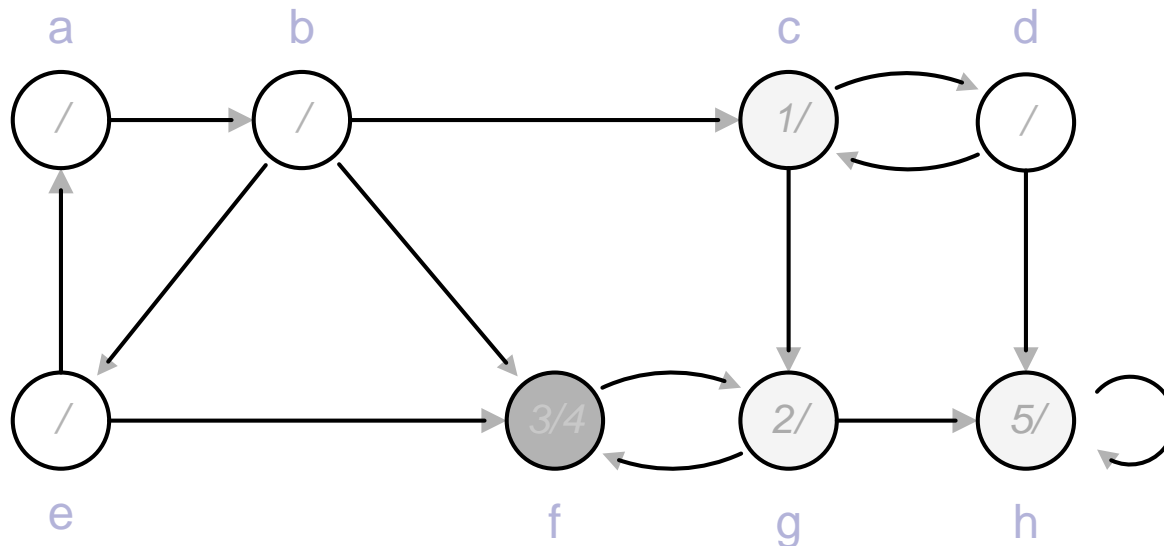
4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

Pilha de execução:

DFS_VISIT(g), CP: linha 4

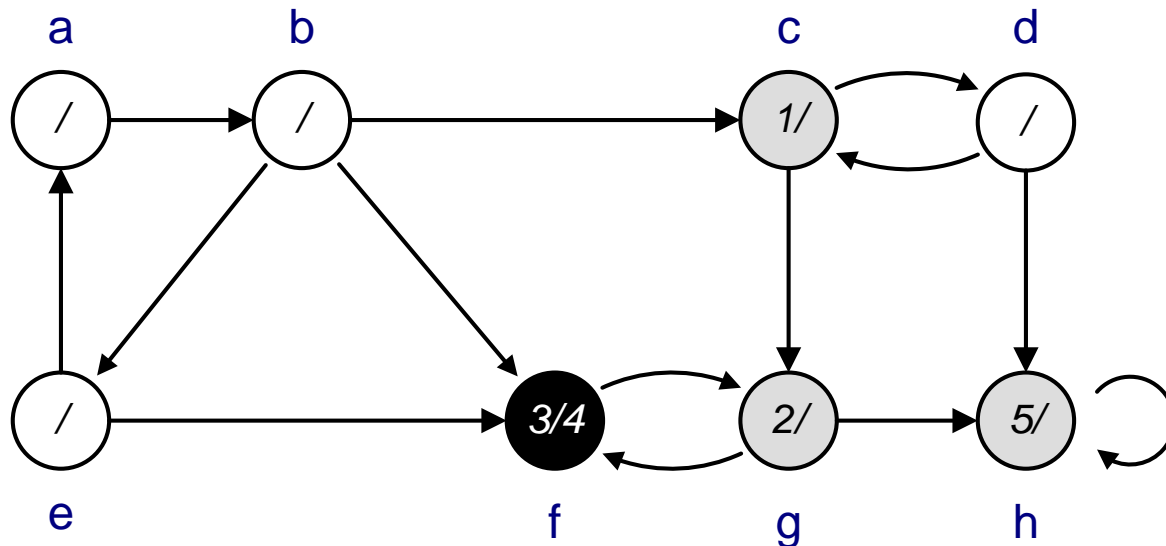
DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

tempo = 4 => 5

Busca em Profundidade

- Para cada adjacente de h: {h}
- Mas o vértice h é CINZA...
- Então a busca sobre h será finalizada...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 5

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 *para cada vértice $v \in Adj(u)$*

5 *se $cor[v] = BRANCO$*

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

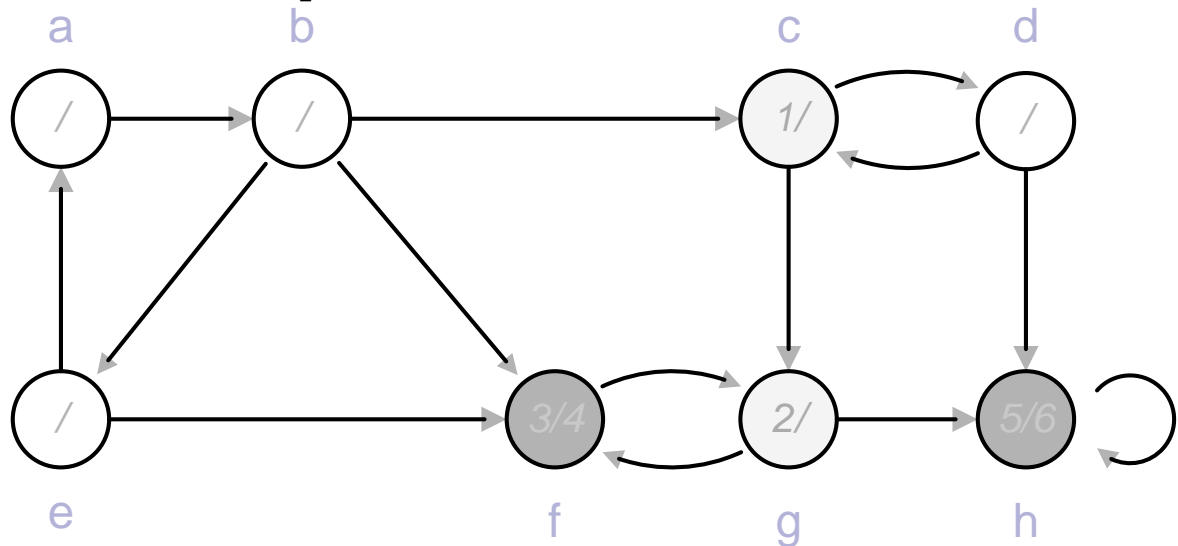
DFS_VISIT(g), CP: linha 4

DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = a

Busca em Profundidade

- Marca h de PRETO;
- Incrementa o tempo em uma unidade;
- Indica o tempo de finalização de h;
- Desempilha...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 5 => 6

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

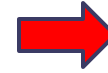
4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Pilha de execução:

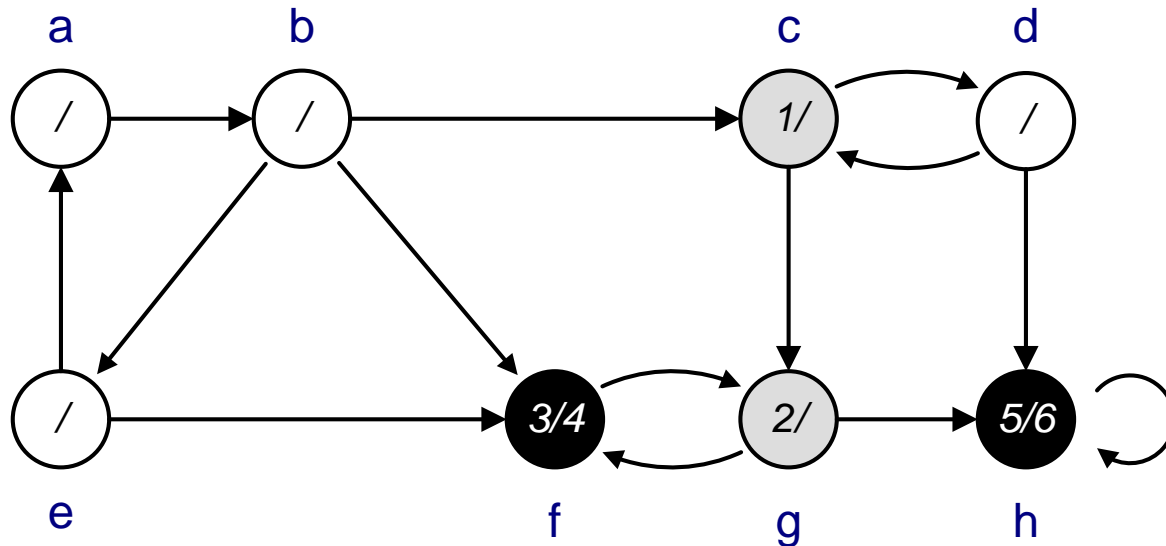
DFS_VISIT(g), CP: linha 4

DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = a

Busca em Profundidade

- Desempilhou : $DFS_VISIT(g)$, CP: linha 4
- O vértice g não possui mais adjacentes não visitados.
- Assim, a busca em g termina...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 6

$DFS - VISIT(u)$

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

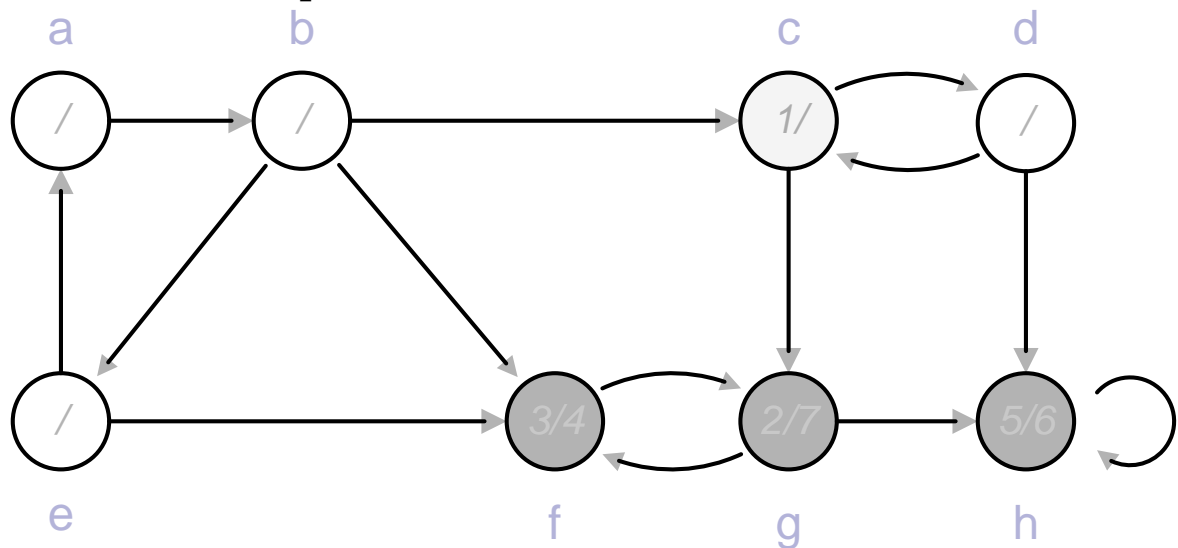
Pilha de execução:

$DFS_VISIT(c)$, CP: linha 4

$DFS(G)$ - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- Marca g de PRETO;
- Incrementa o tempo em uma unidade;
- Indica o tempo de finalização de g;
- Desempilha...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Pilha de execução:

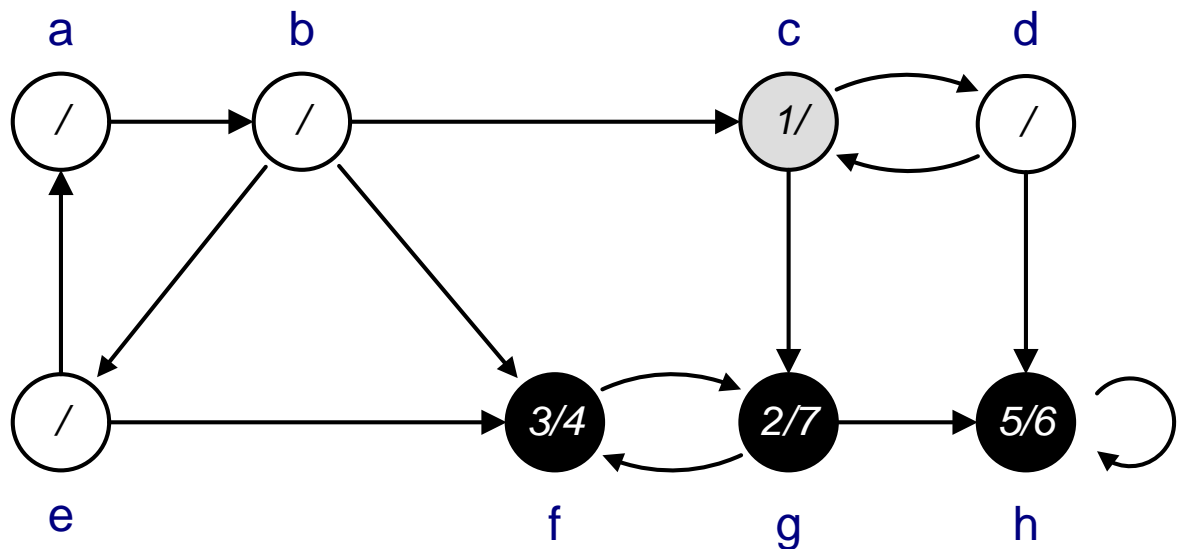
DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

tempo = 6 => 7

Busca em Profundidade

- Desempilhou $DFS_VISIT(c)$, CP: linha 4
- O próximo adjacente do vértice c é o vértice d , que é BRANCO, assim, invoca $DFS_VISIT(d)$ e empilha [$DFS_VISIT(c)$, CP: linha 4] novamente



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 7

$DFS - VISIT(u)$

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

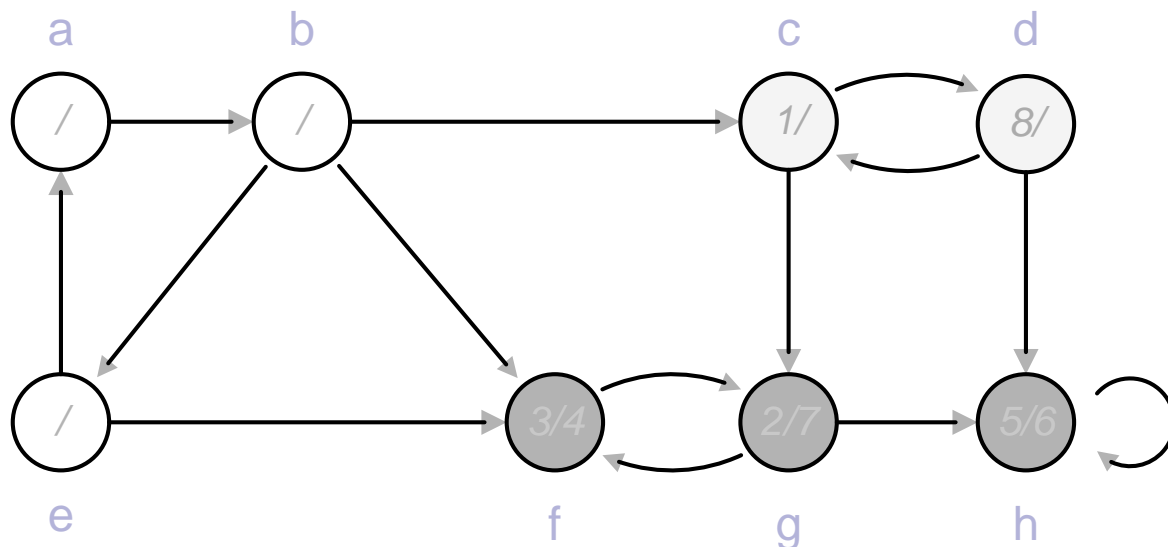
8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

$DFS(G)$ - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

Busca em Profundidade

- Desempilhou $DFS_VISIT(c)$, CP: linha 4
- O próximo adjacente do vértice c é o vértice d , que é BRANCO, assim, invoca $DFS_VISIT(d)$ e empilha $[DFS_VISIT(c), CP: linha 4]$ novamente



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

$DFS - VISIT(u)$

- 1 $cor[u] \leftarrow CINZA$
- 2 $tempo \leftarrow tempo + 1$
- 3 $d[u] \leftarrow tempo$
- 4 para cada vértice $v \in Adj(u)$
- 5 se $cor[v] = BRANCO$
- 6 $DFS - VISIT(v)$
- 7 $cor[u] \leftarrow PRETO$
- 8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

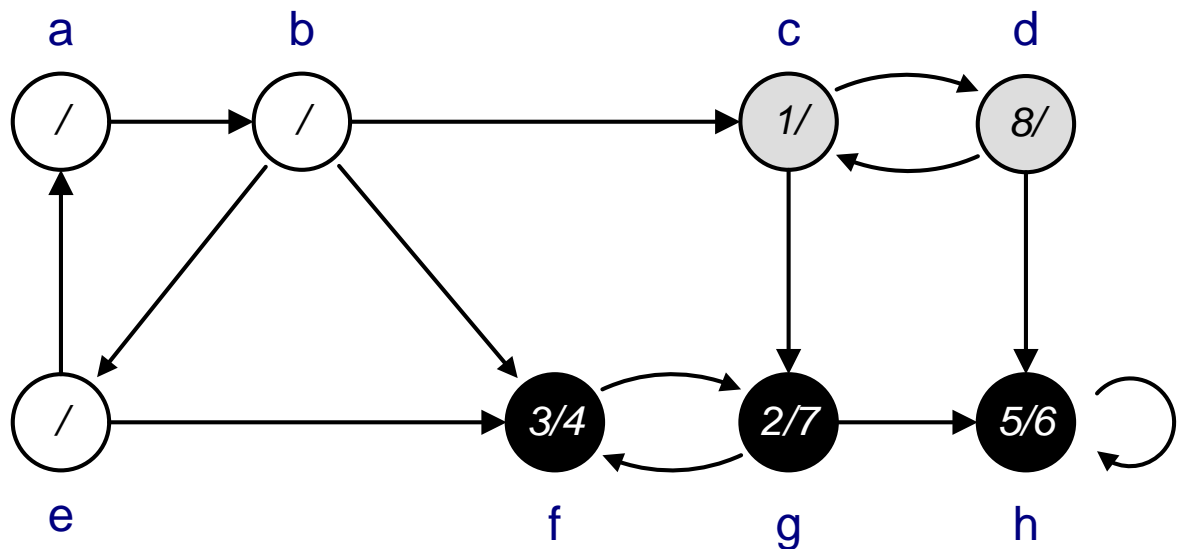
$DFS_VISIT(c)$, CP: linha 4

$DFS(G)$ - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

tempo = 7 => 8

Busca em Profundidade

- O vértice d possui apenas um adjacente, que não é BRANCO, assim a busca sobre d termina...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 8

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

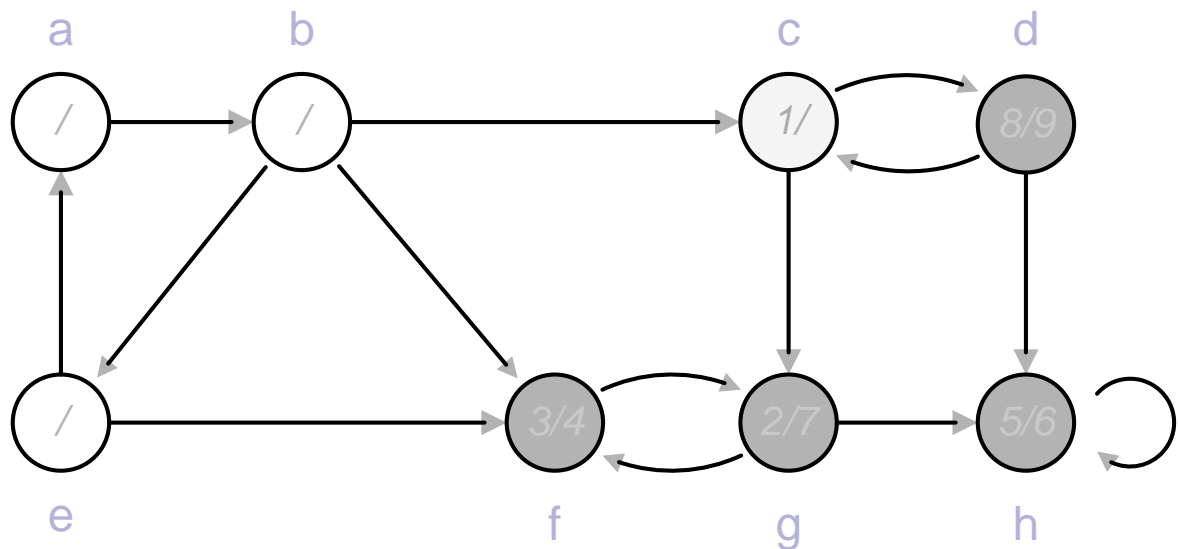
Pilha de execução:

DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = a

Busca em Profundidade

- Marca d de PRETO; Incrementa o tempo;
- Atribui o tempo de finalização de d;
- Desempilha...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Pilha de execução:

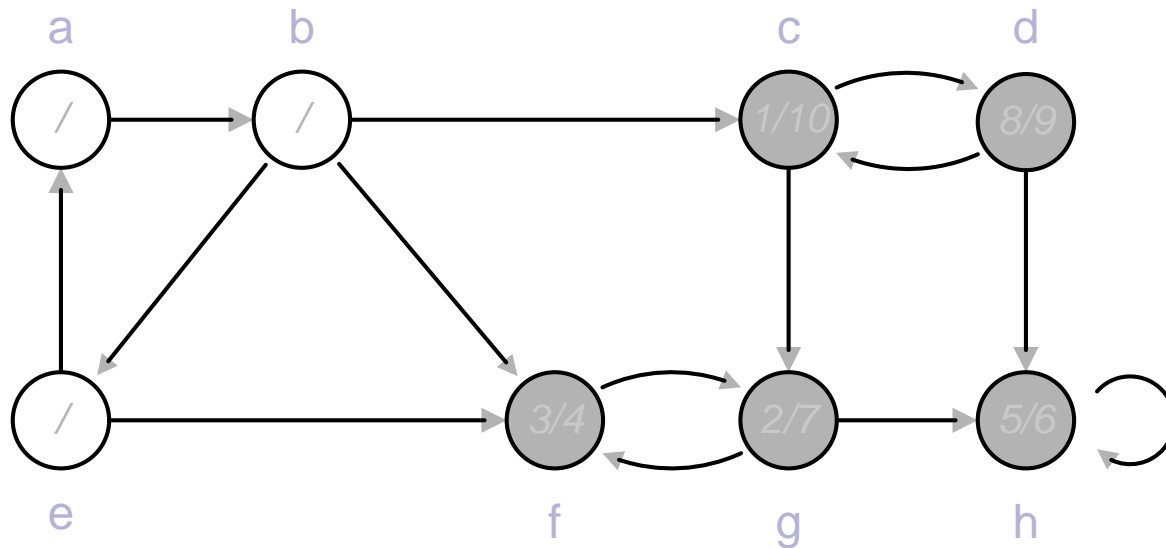
DFS_VISIT(c), CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

tempo = 8 => 9

Busca em Profundidade

- Marca c de PRETO; Incrementa o tempo;
- Atribui o tempo de finalização de c ;
- Desempilha...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



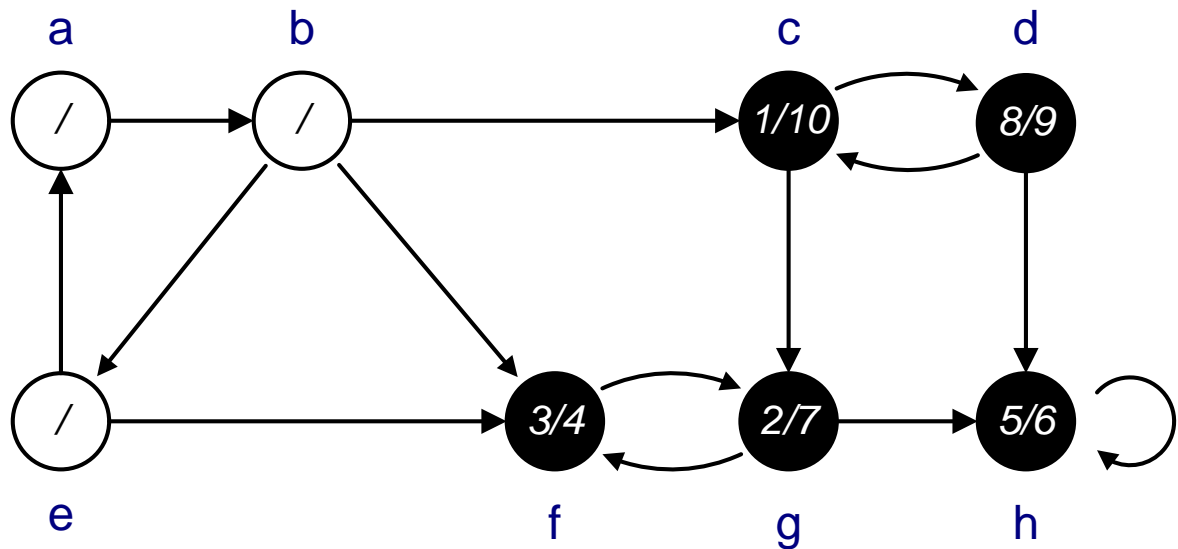
Pilha de execução:

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$

$tempo = 9 \Rightarrow 10$

Busca em Profundidade

- Desempilhou: DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = a$
- O vértice a é BRANCO, então chama: DFS_VISIT(a);
- Empilha DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = b$



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]



Pilha de execução:
VAZIA

tempo = 10

DFS(G)

1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$

2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$

3 $tempo \leftarrow 0$

4 para cada vértice $u \in V[G]$

5 se $cor[u] = BRANCO$

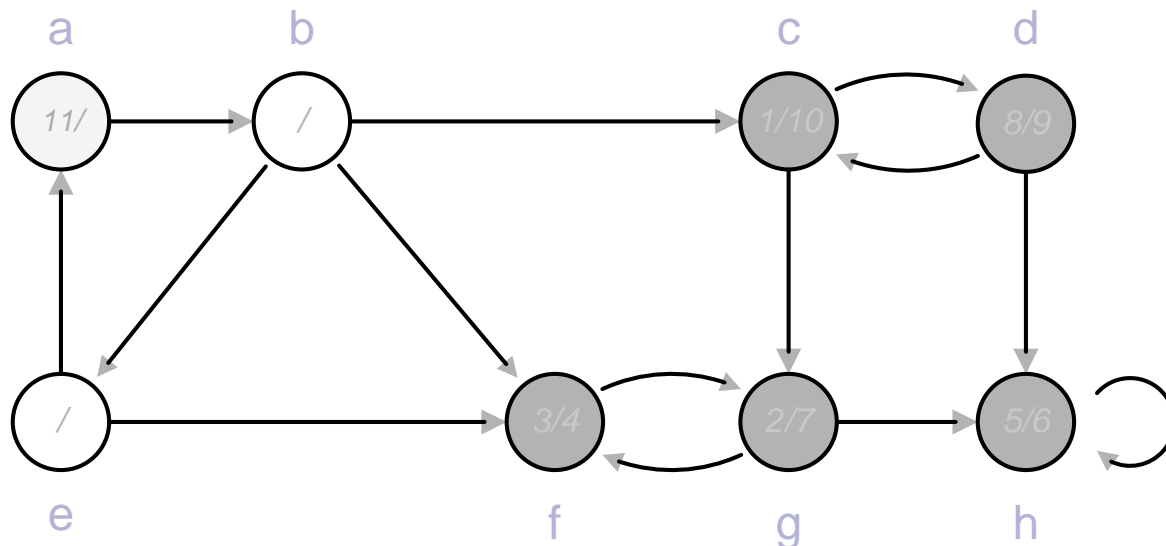
6 $DFS_VISIT(u)$

Busca em Profundidade

- Marca a de CINZA;
- Incrementa o tempo;
- Atribui o tempo de descoberta de a...

DFS - VISIT(u)

- 1 $cor[u] \leftarrow CINZA$
- 2 $tempo \leftarrow tempo + 1$
- 3 $d[u] \leftarrow tempo$
- 4 para cada $v \in Adj(u)$
- 5 se $cor[v] = BRANCO$
- 6 *DFS - VISIT(v)*
- 7 $cor[u] \leftarrow PRETO$
- 8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

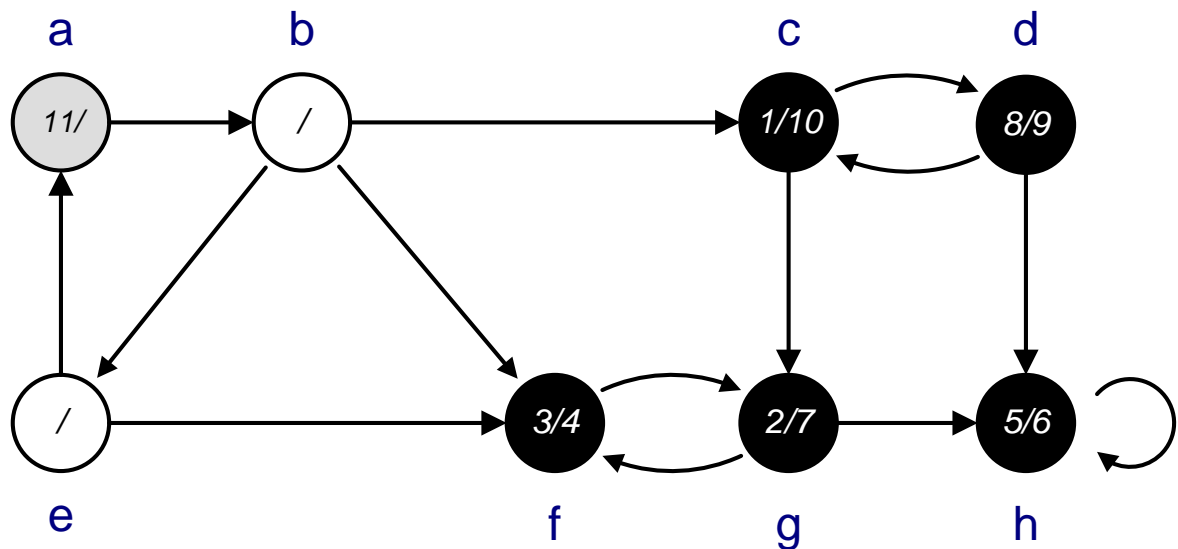
Pilha de execução:

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = b

tempo = 10 => 11

Busca em Profundidade

- Para todos os adjacentes do vértice $a = \{b\}$
- Se cor de b for BRANCA, então, $DFS_VISIT(b)$
- Empilha $DFS_VISIT(a)$: $CP=4$.



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 11

$DFS - VISIT(u)$

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 **para cada** $v \in Adj(u)$

5 **se** $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

$DFS(G) - CP$: linha 4 - próximo: $u = b$

Busca em Profundidade

- Marca b de CINZA;
- Incrementa o tempo;
- Atribui o tempo de descoberta de b...

DFS - VISIT(u)



1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

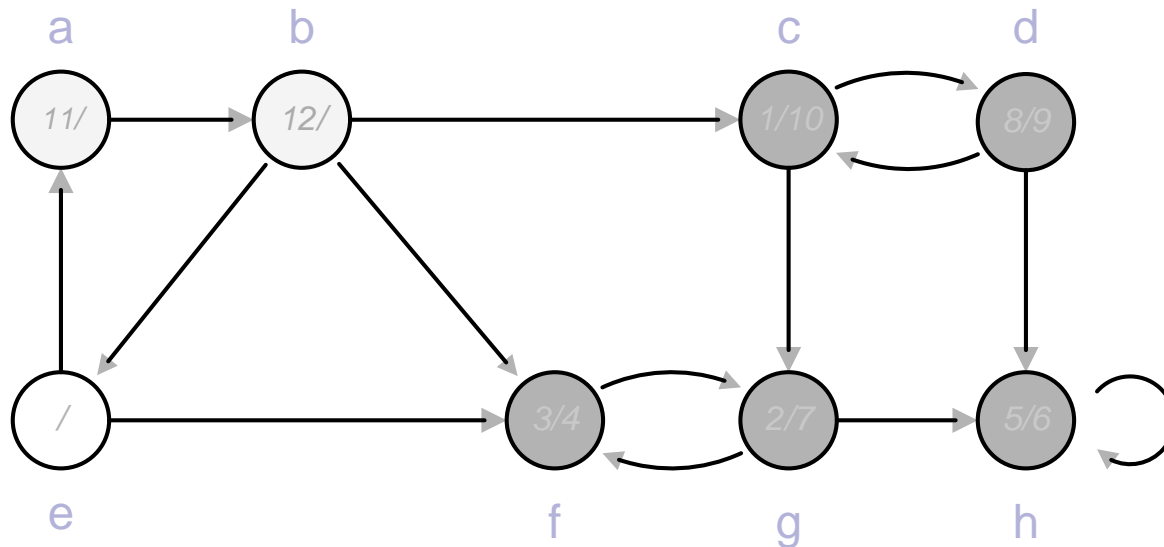
4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

Pilha de execução:

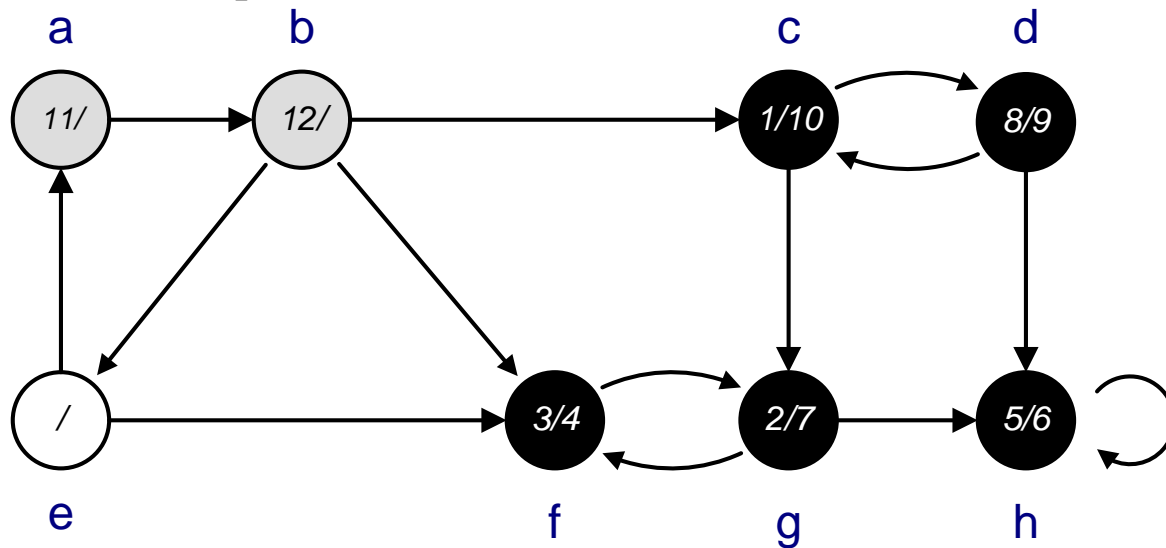
DFS_VISIT(a) - CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = b

tempo = 11 => 12

Busca em Profundidade

- Para todos os adjacentes do vértice $b = \{c,e,f\}$
- A cor de c e de f é PRETA, então pula!
- Como a cor de e é BRANCA, então, $DFS_VISIT(e)$
- Empilha $DFS_VISIT(b)$: CP=4.



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 12

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 *para cada vértice $v \in Adj(u)$*

5 *se $cor[v] = BRANCO$*

6 *$DFS - VISIT(v)$*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

$DFS_VISIT(a)$ - CP: linha 4

$DFS(G)$ - CP: linha 4 - próximo: $u = b$

Busca em Profundidade

- Marca e de CINZA;
- Incrementa o tempo;
- Atribui o tempo de descoberta de e...

DFS - VISIT(u)



1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

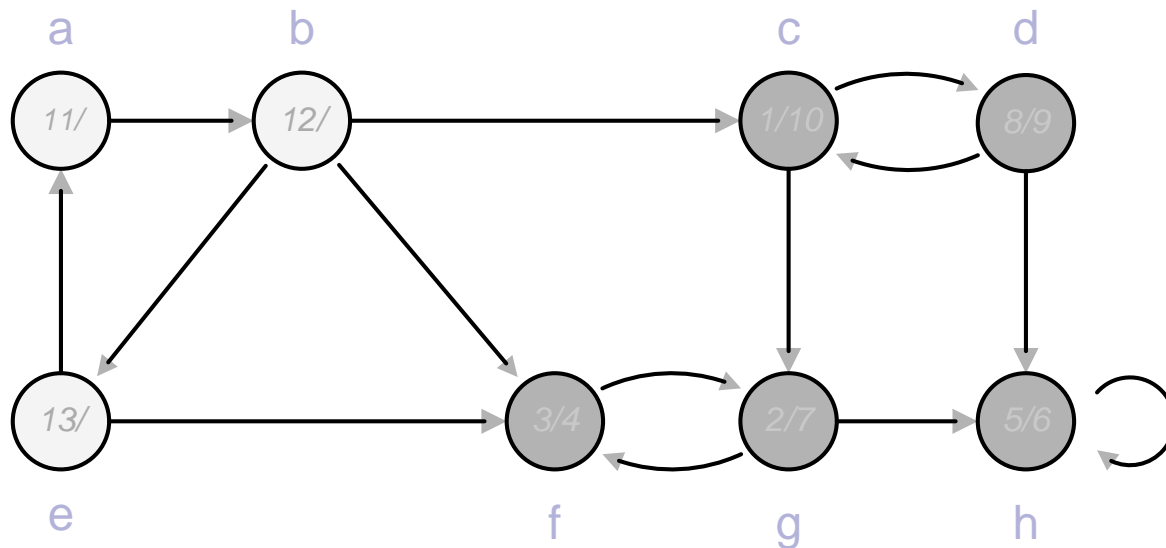
4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 12 => 13

Pilha de execução:

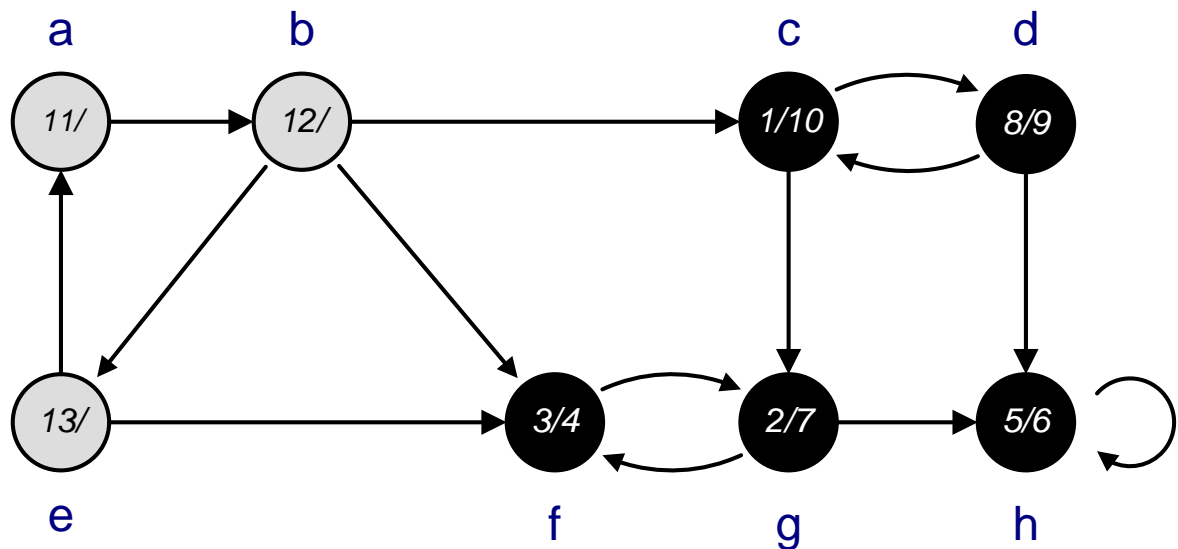
DFS_VISIT(b) - CP: linha 4

DFS_VISIT(a) - CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = b

Busca em Profundidade

- Avalia o único adjacente do vértice $e = \{f\}$;
- O vértice f não é BRANCO, então, finaliza a busca sobre o vértice e .



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 13

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

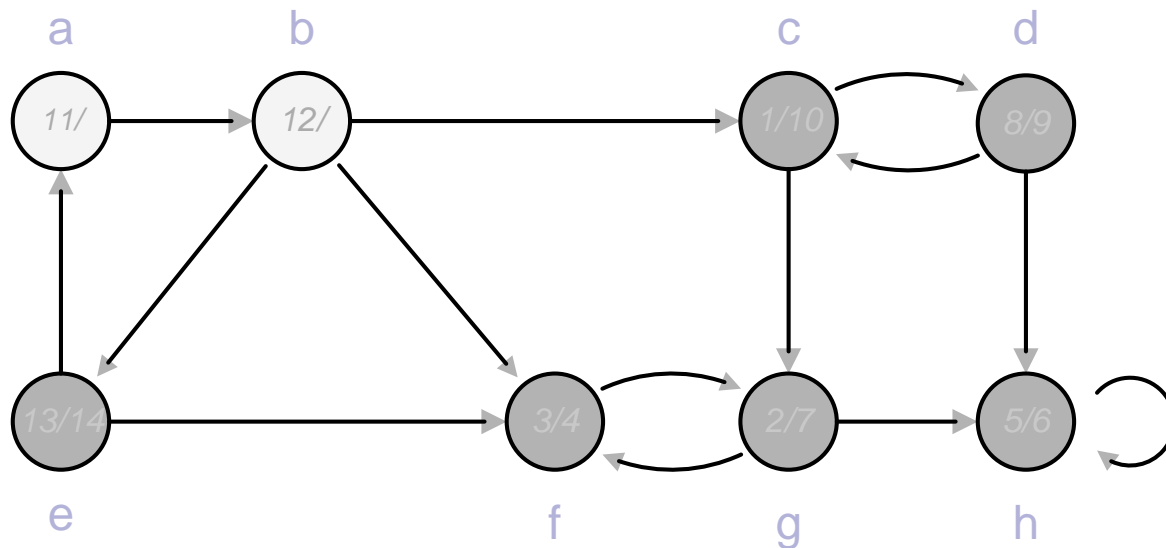
DFS_VISIT(b) - CP: linha 4

DFS_VISIT(a) - CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = b$

Busca em Profundidade

- Marca e de PRETO; Incrementa o tempo;
- Atribui o tempo de finalização de e;
- Desempilha...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 13 => 14

DFS - VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS - VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Pilha de execução:

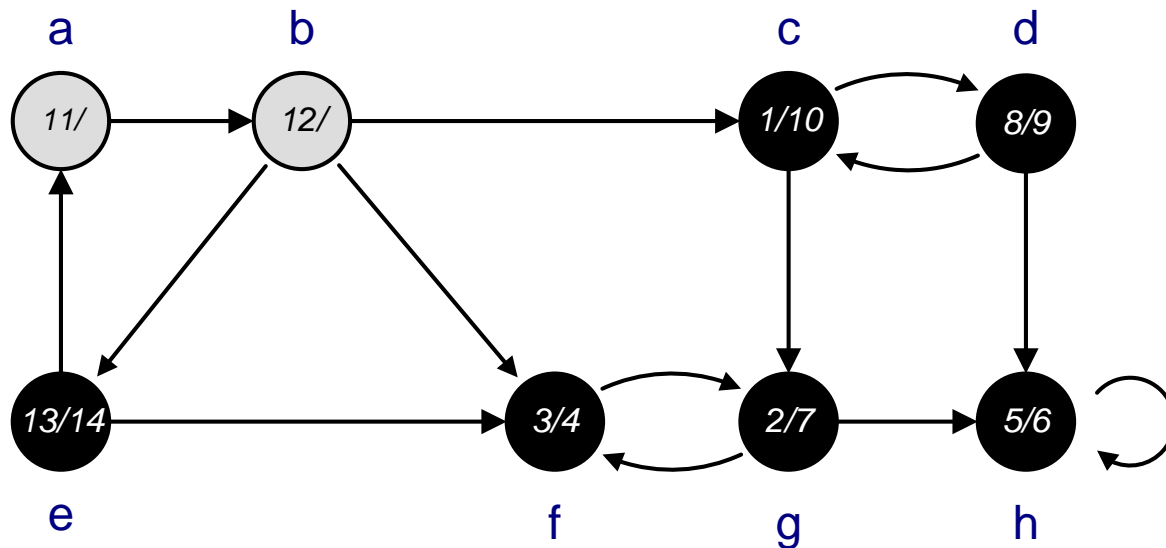
DFS_VISIT(b) - CP: linha 4

DFS_VISIT(a) - CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = b

Busca em Profundidade

- Não possui mais adjacentes;
- Assim finaliza busca em b...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 14

DFS – VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS – VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

DFS_VISIT(a) - CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: u = b

Busca em Profundidade

- Marca b de PRETO; Incrementa o tempo;
- Atribui o tempo de finalização de b;
- Desempilha...

DFS – VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

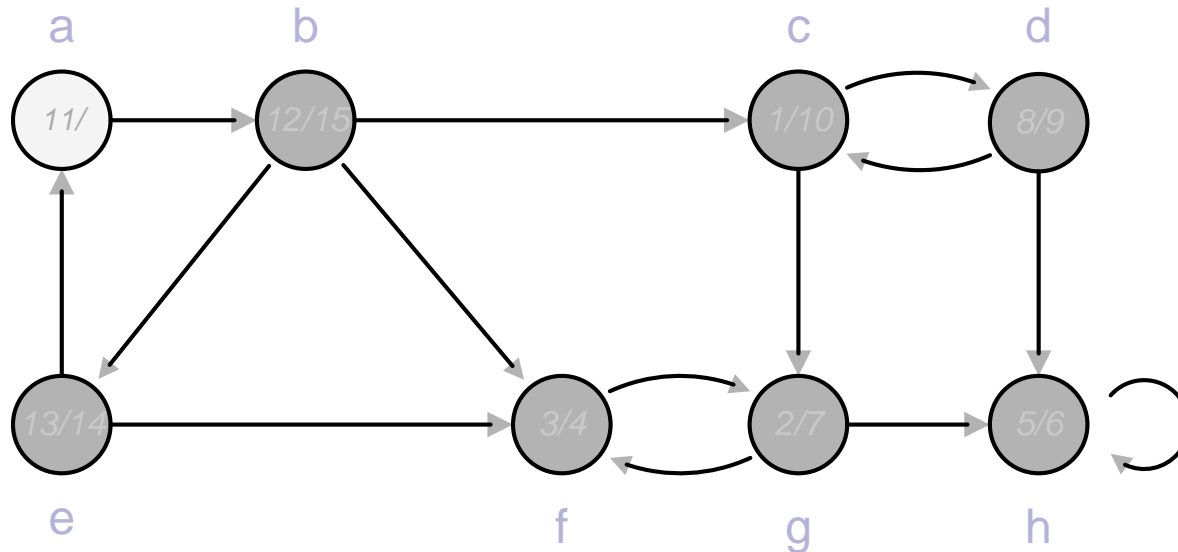
4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS – VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

Pilha de execução:

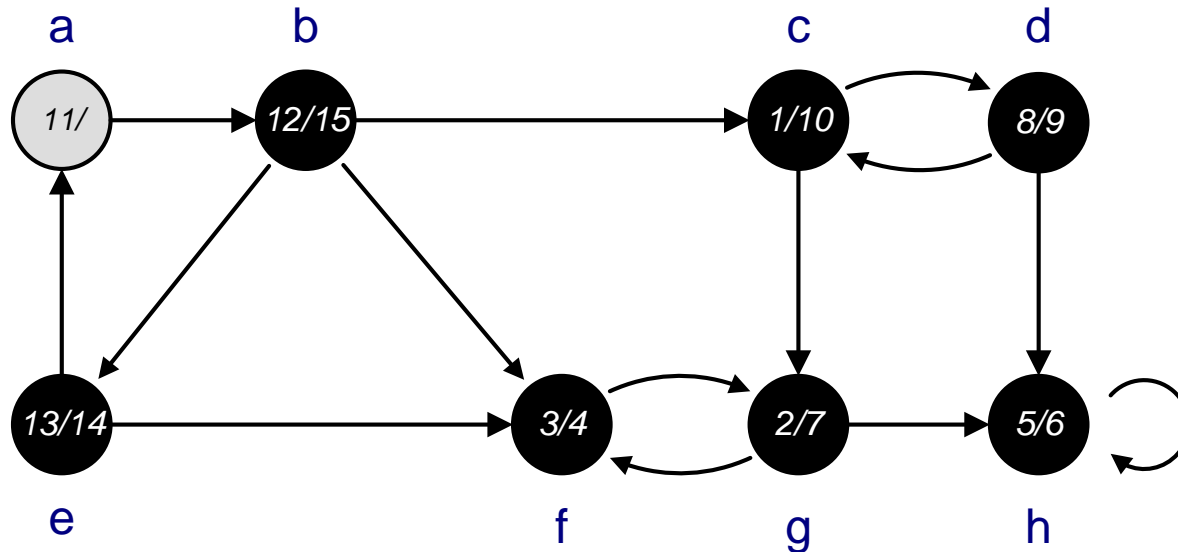
DFS_VISIT(a) - CP: linha 4

DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = b$

tempo = 14 => 15

Busca em Profundidade

- Desempilhou: $DFS_VISIT(a)$ - CP: linha 4
- Mas o vértice a não possui mais adjacentes BRANCOS;
- Assim, finaliza a busca sobre a...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

tempo = 15

$DFS - VISIT(u)$

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 $DFS - VISIT(v)$

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$

Pilha de execução:

$DFS(G)$ - CP: linha 4 - próximo: $u = b$

Busca em Profundidade

- Marca a de PRETO; Incrementa o tempo;
- Atribui o tempo de finalização de a;
- Desempilha...

DFS – VISIT(u)

1 $cor[u] \leftarrow CINZA$

2 $tempo \leftarrow tempo + 1$

3 $d[u] \leftarrow tempo$

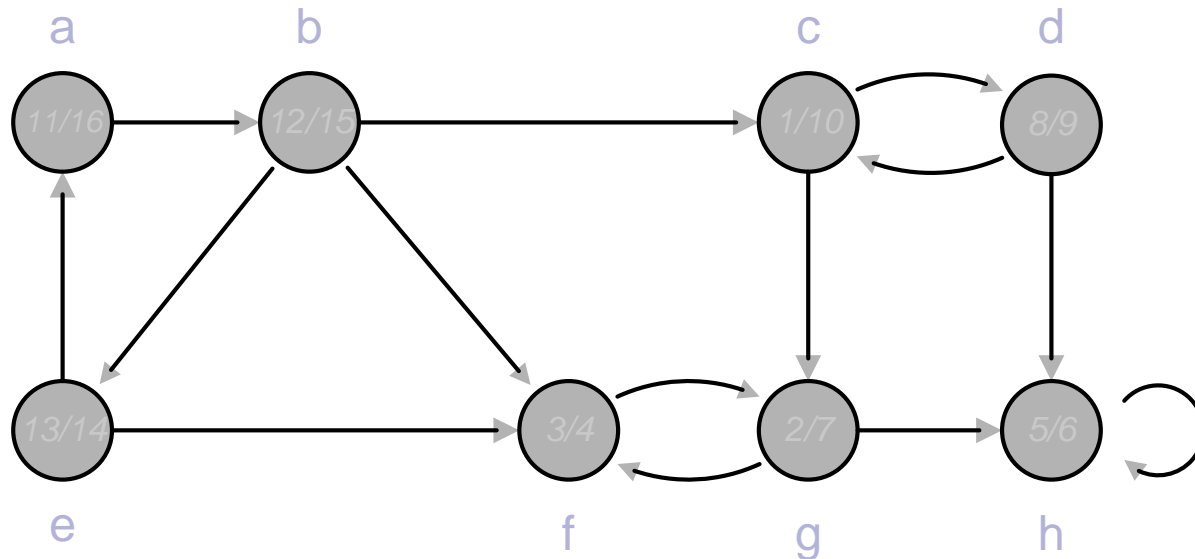
4 para cada vértice $v \in Adj(u)$

5 se $cor[v] = BRANCO$

6 *DFS – VISIT(v)*

7 $cor[u] \leftarrow PRETO$

8 $f[u] \leftarrow tempo \leftarrow (tempo + 1)$



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]

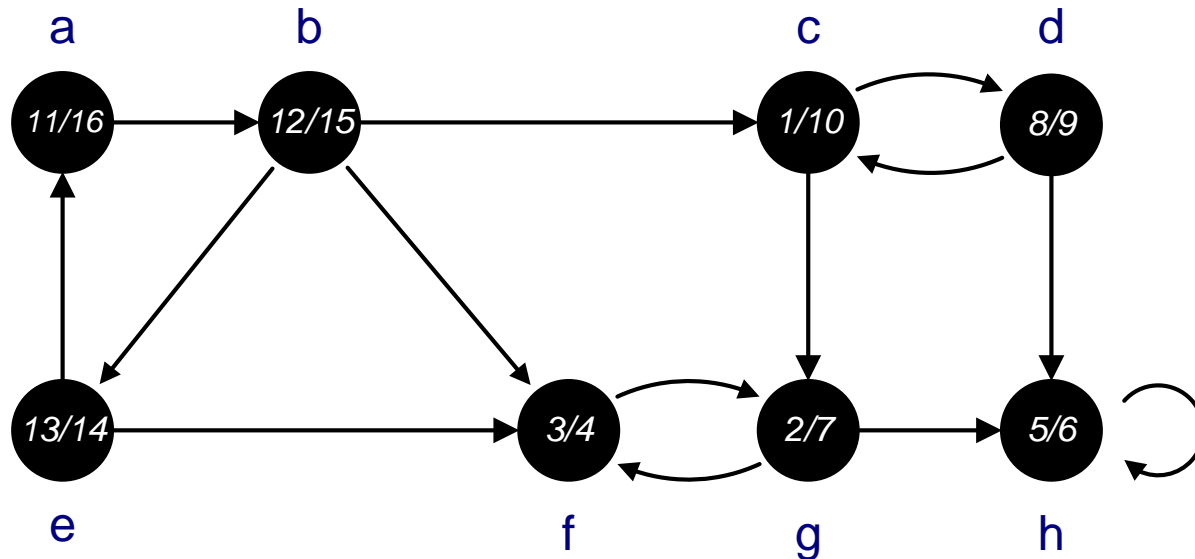
Pilha de execução:

DFS(G) - CP: linha 4 – próximo: $u = b$

tempo = 15 => 16

Busca em Profundidade

- Desempilhou: DFS(G) - CP: linha 4 - próximo: $u = b$
- Mas todos os vértices não são mais BRANCOS;
- Assim, a DFS(G) termina verificando a cor de todos os vértices restantes...



Lista: [c,a,b,d,e,f,g,h]



tempo = 16

DFS(G)

1 para cada vértice $u \leftarrow V[G]$

2 $cor[u] \leftarrow BRANCO$

3 $tempo \leftarrow 0$

4 para cada vértice $u \in V[G]$

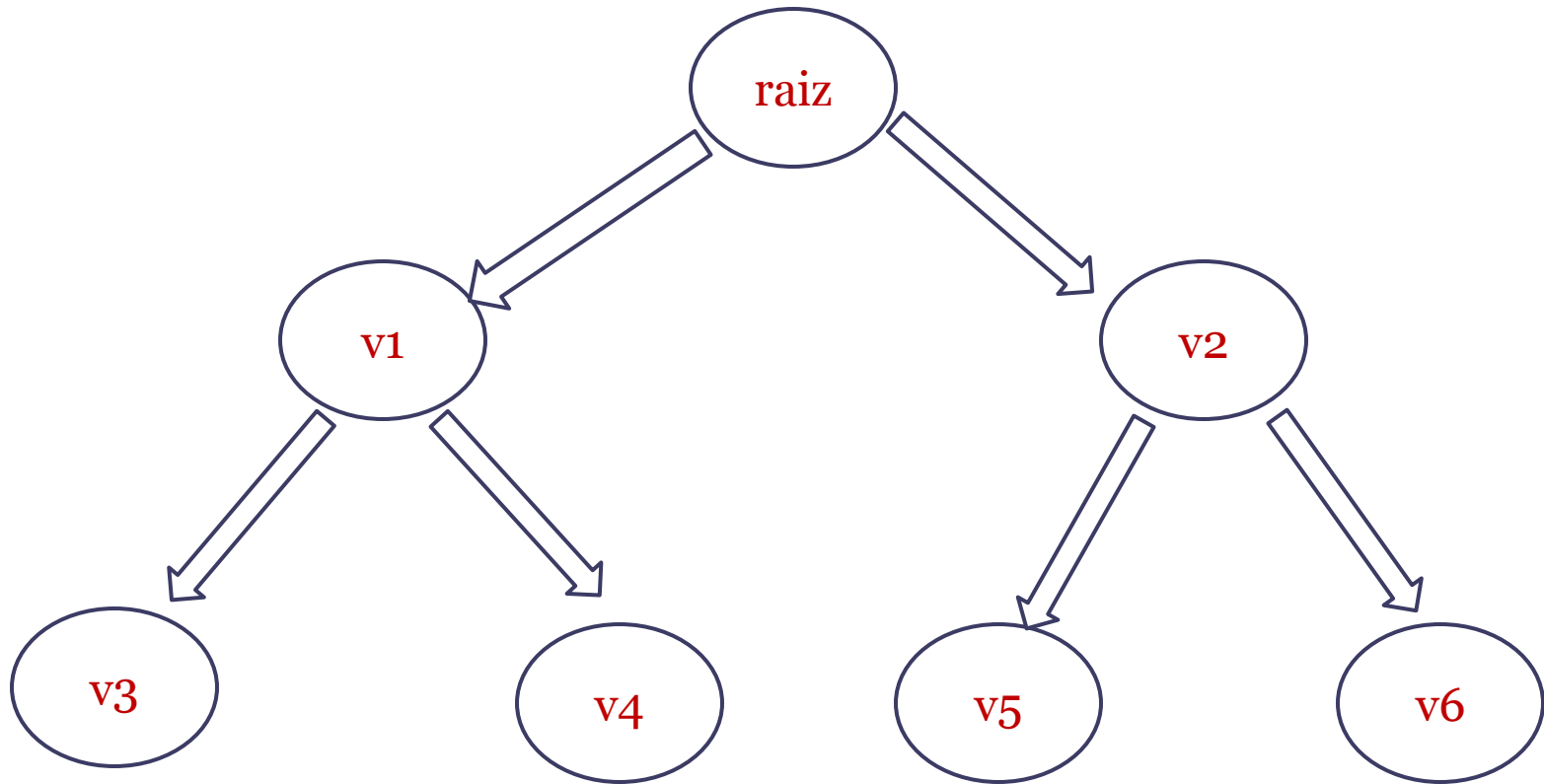
5 se $cor[u] = BRANCO$

6 $DFS-VISIT(u)$

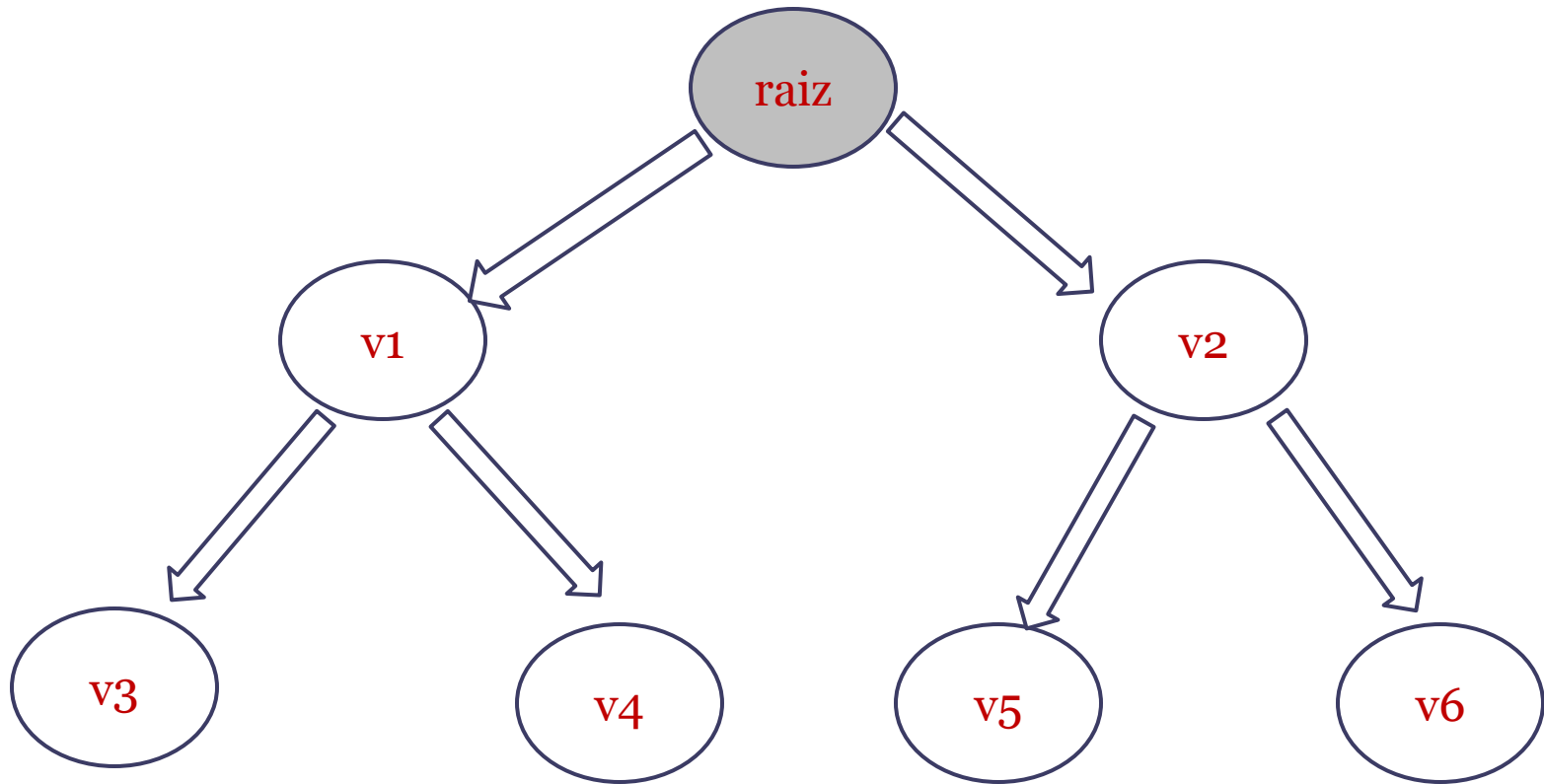
Pilha de execução:

VAZIA

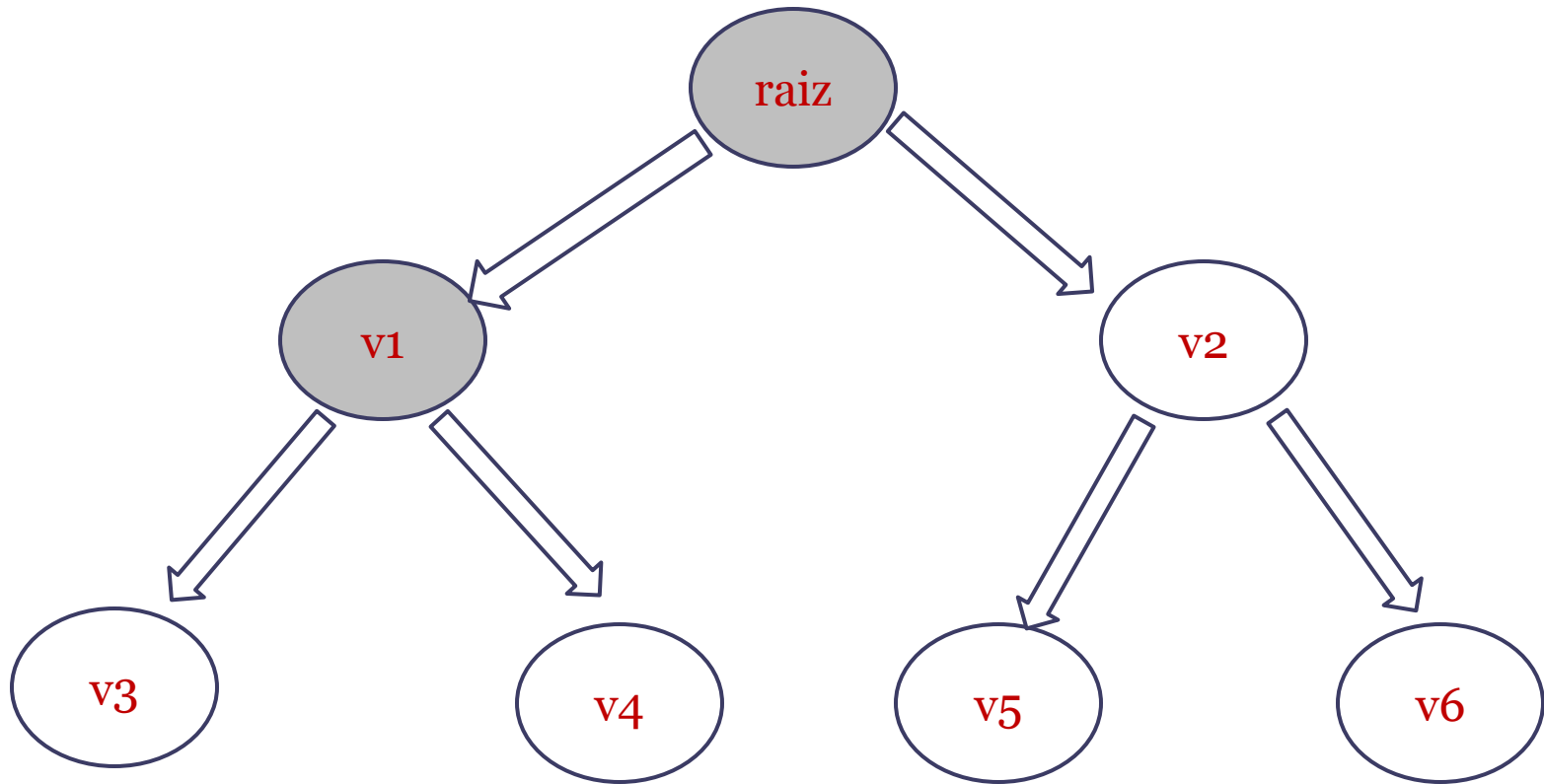
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



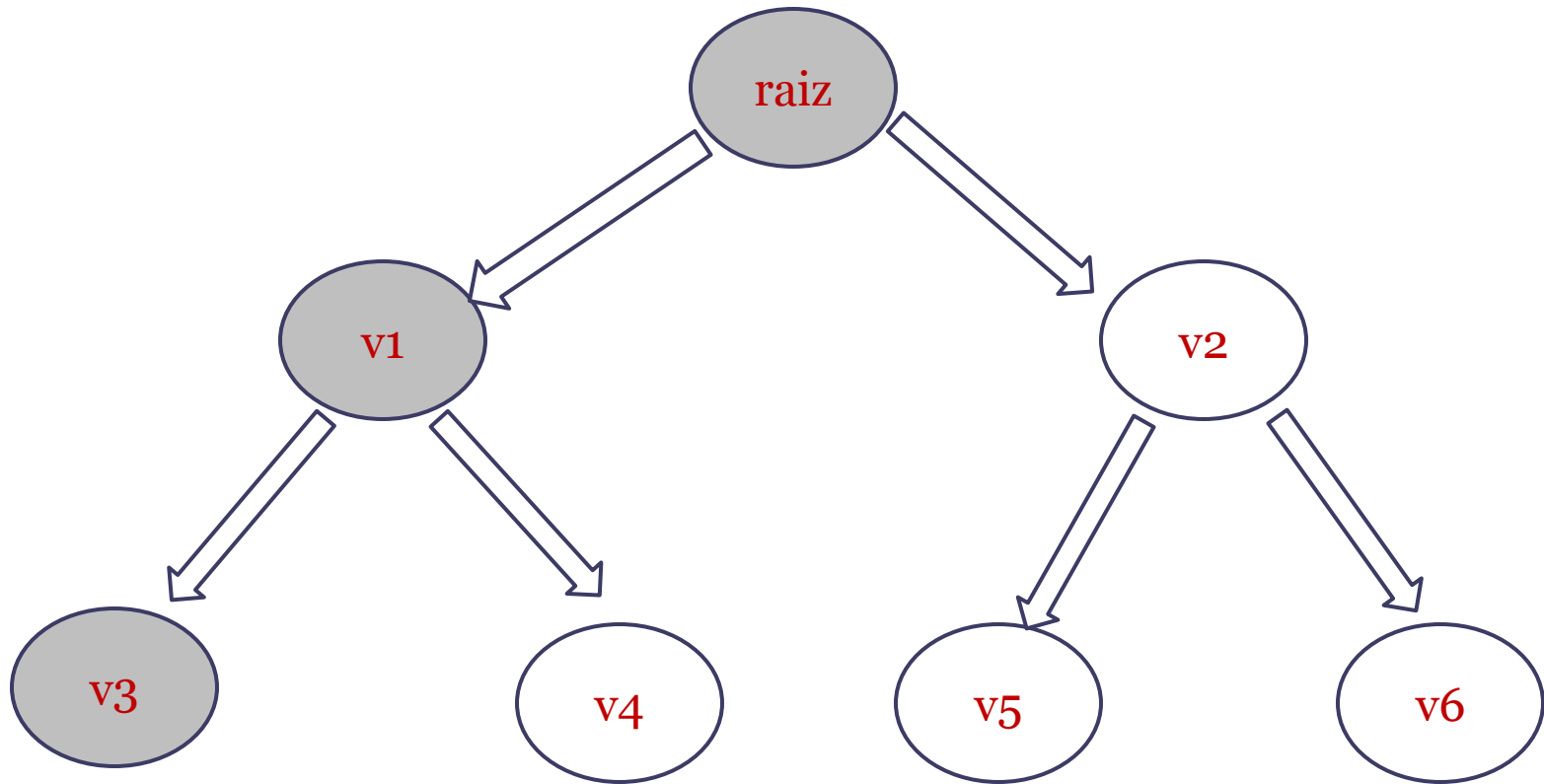
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



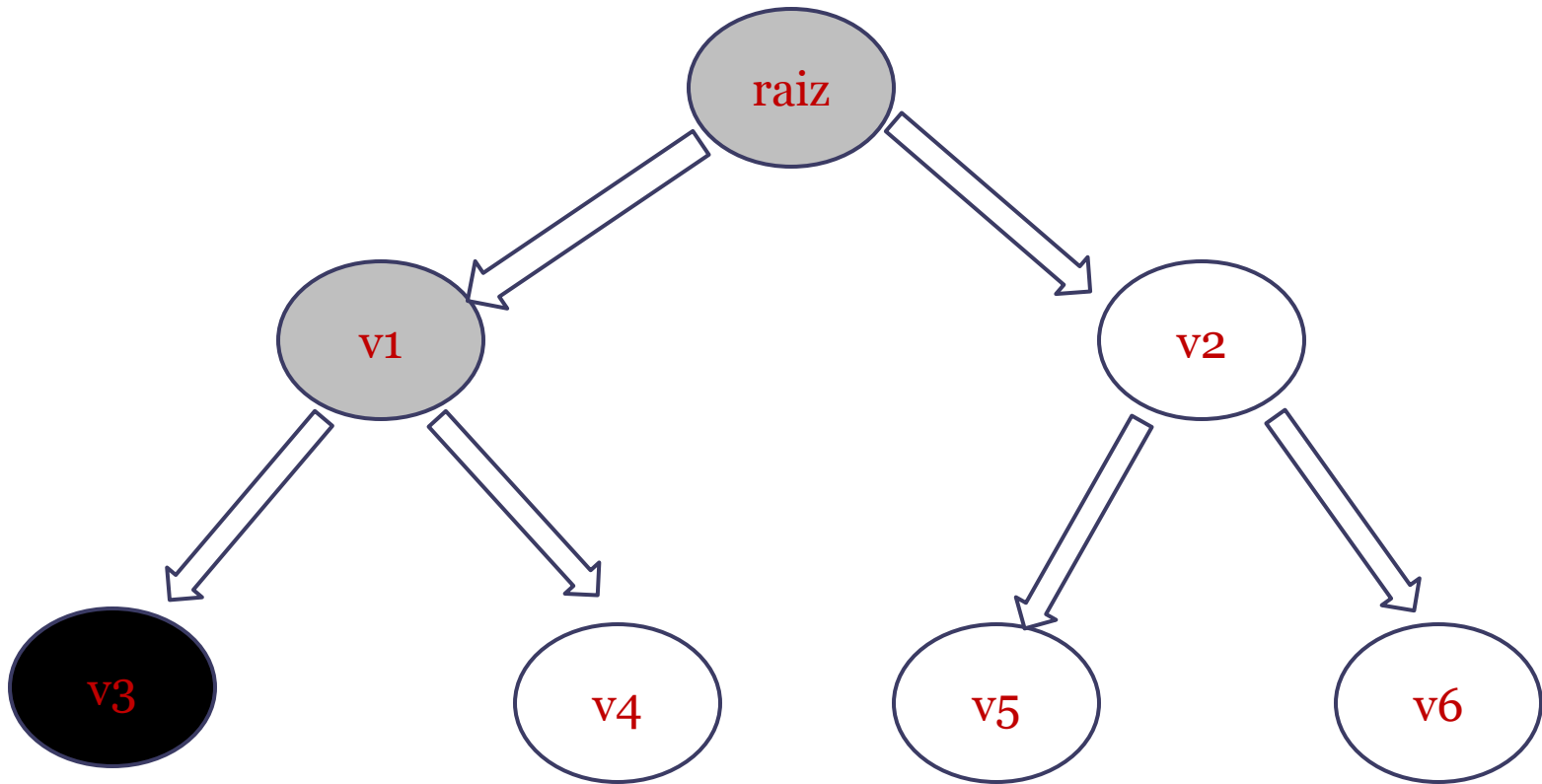
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



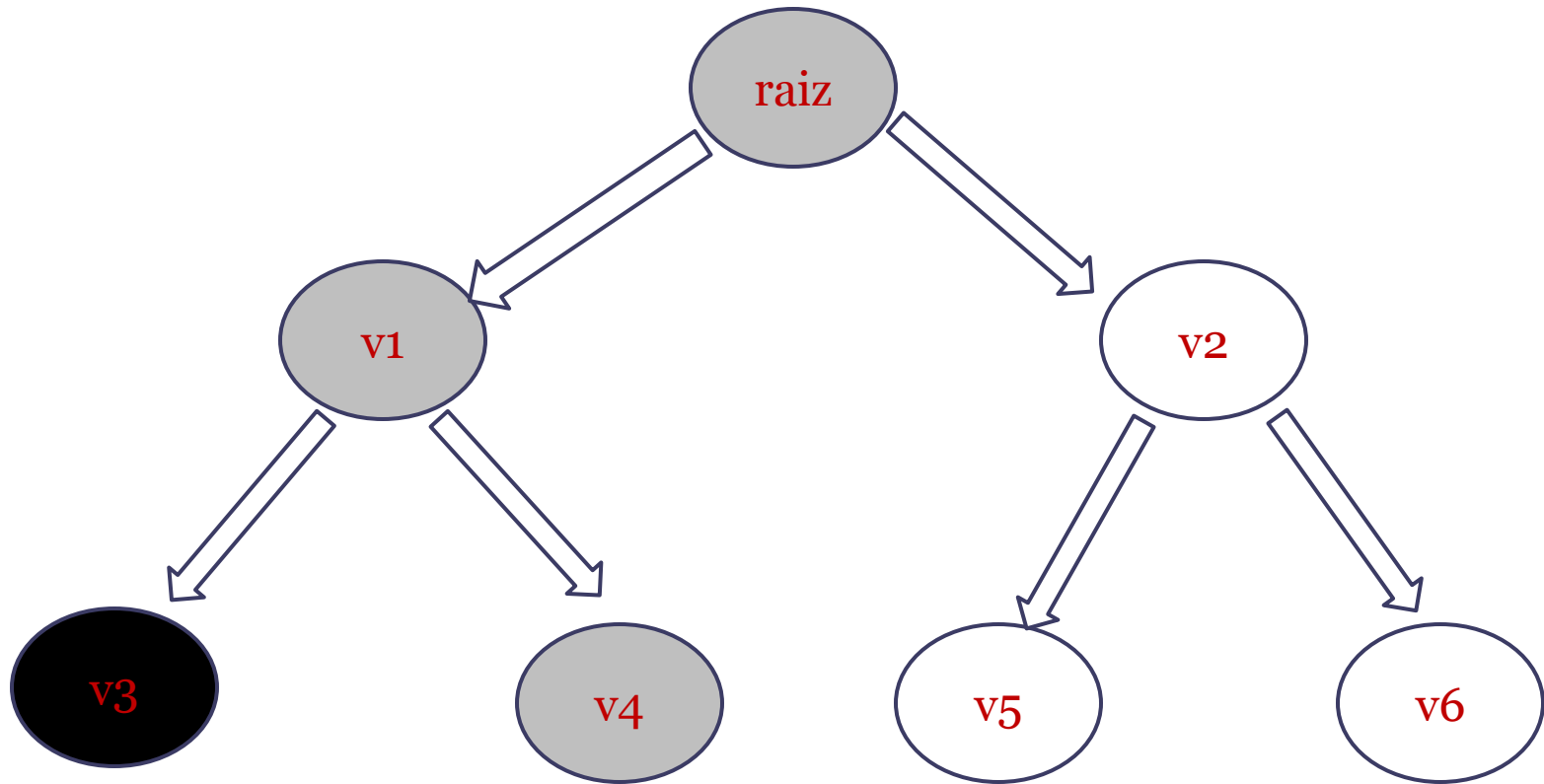
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



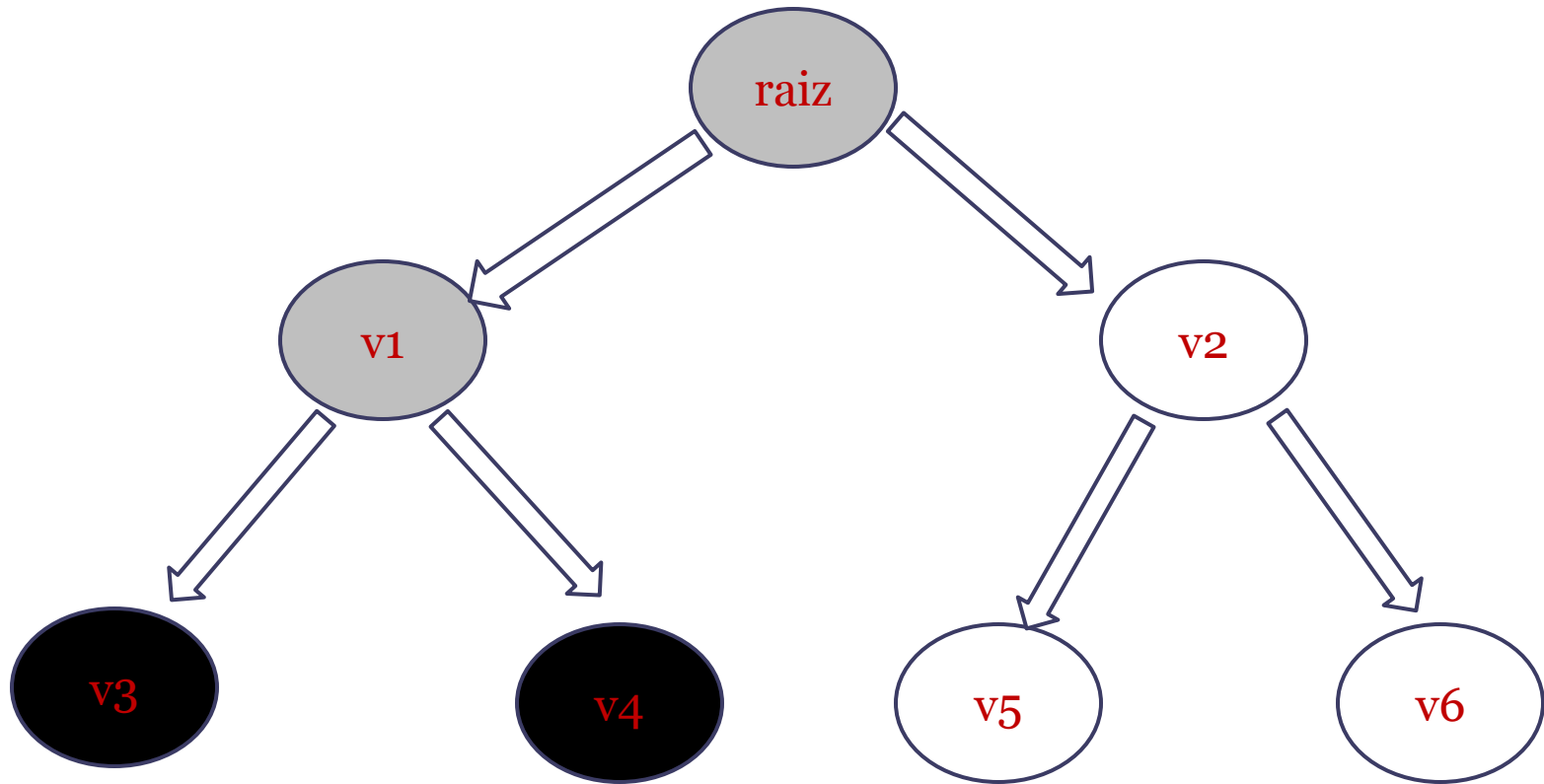
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



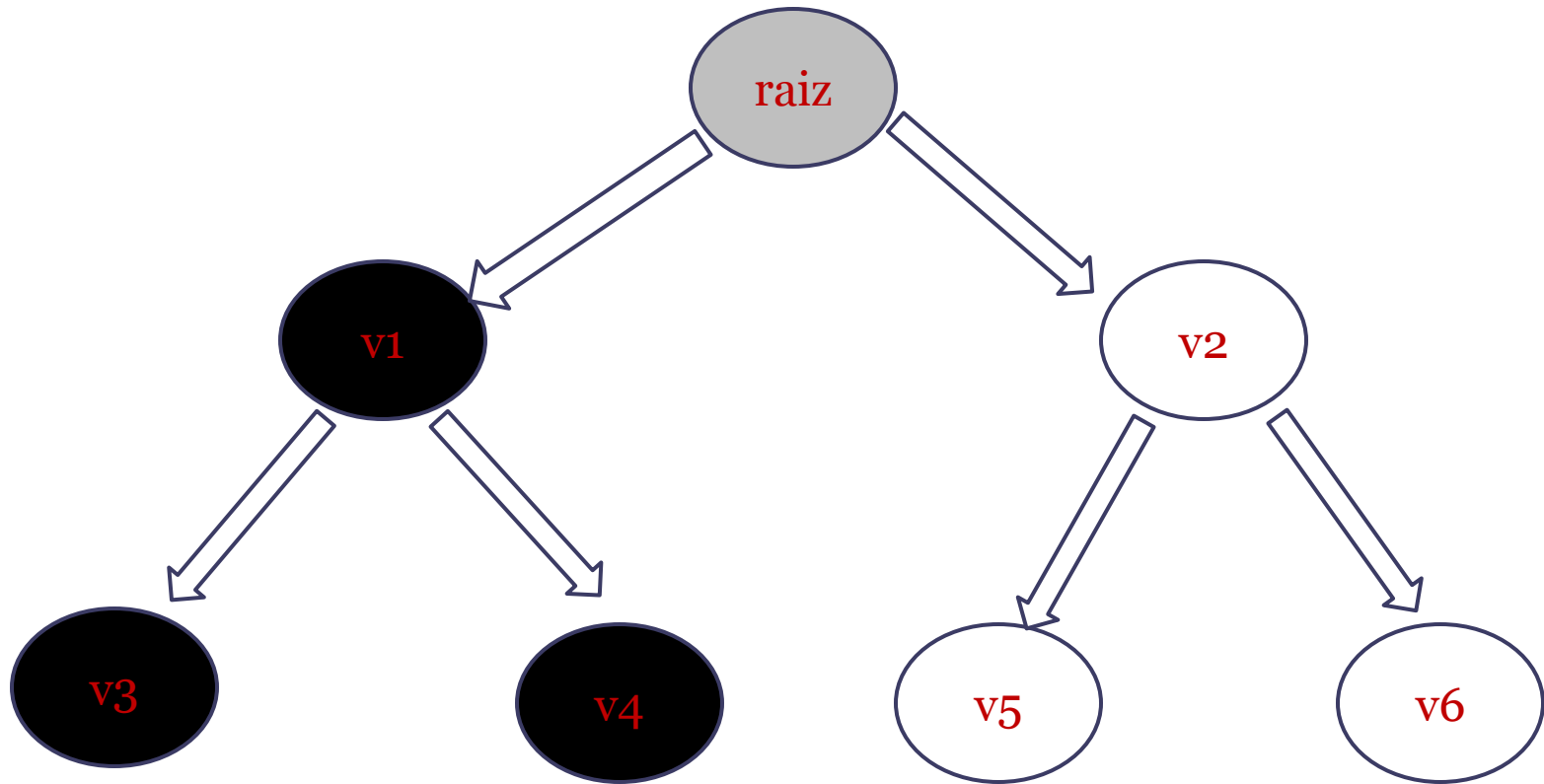
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



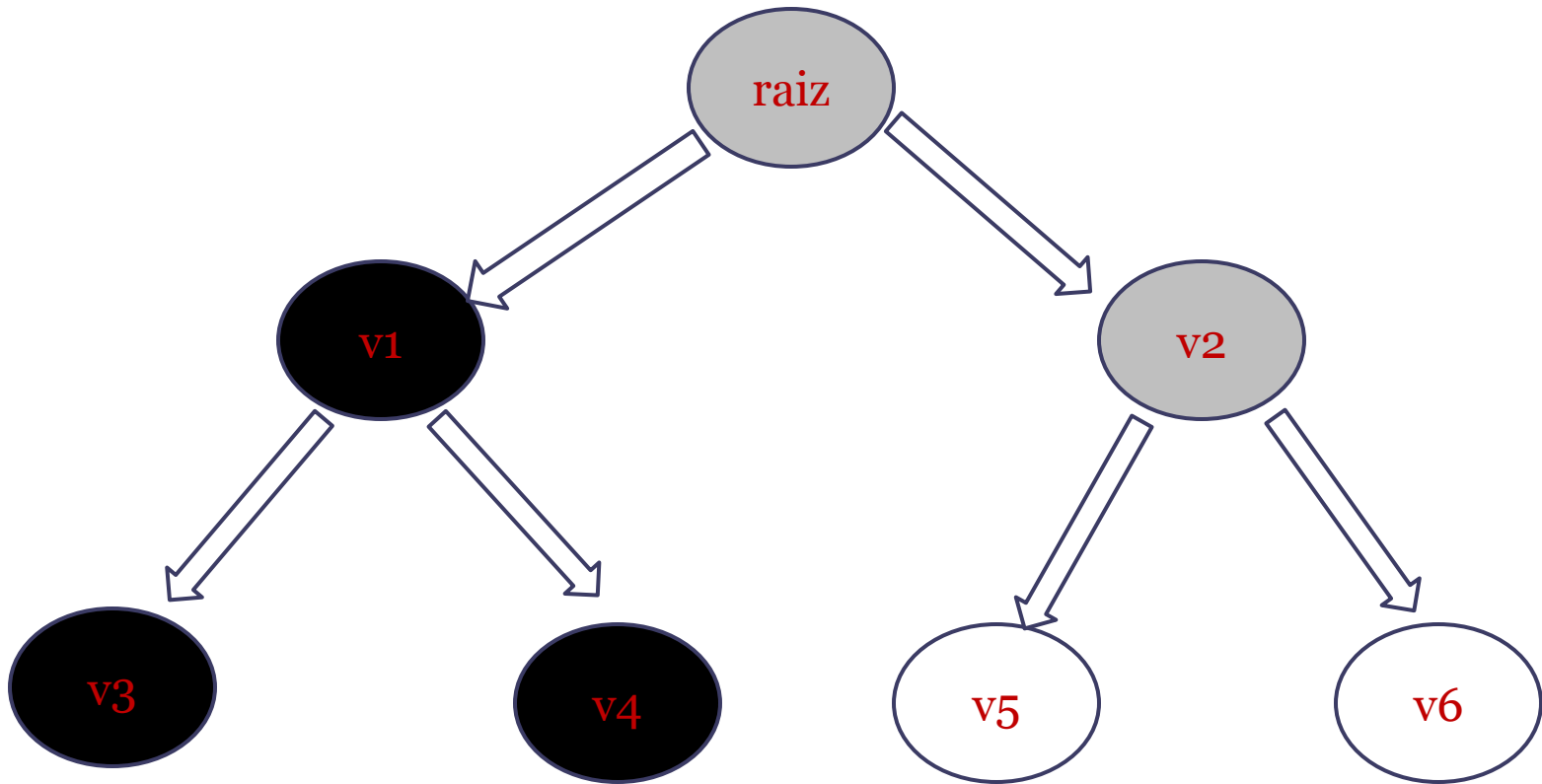
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



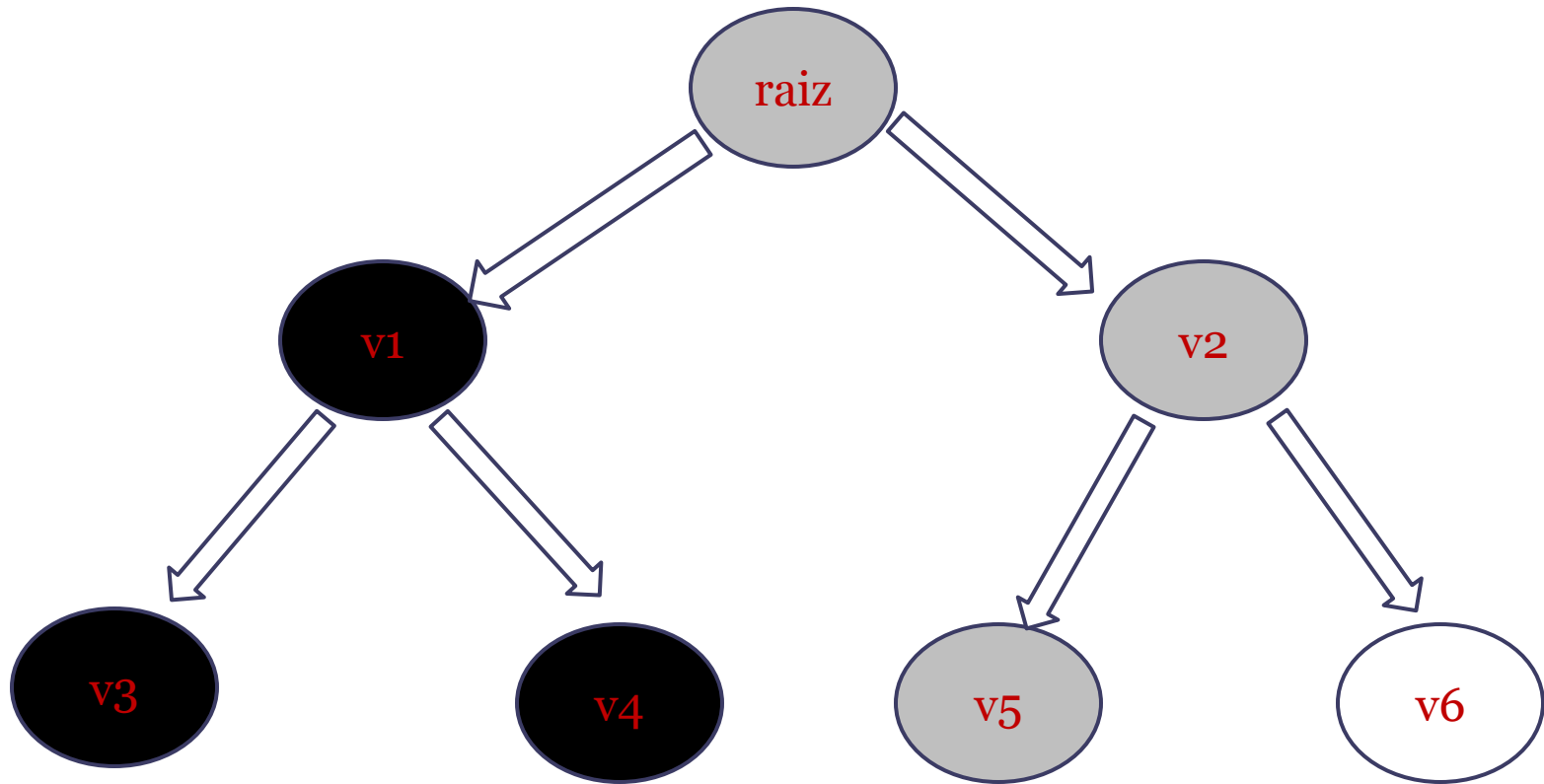
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



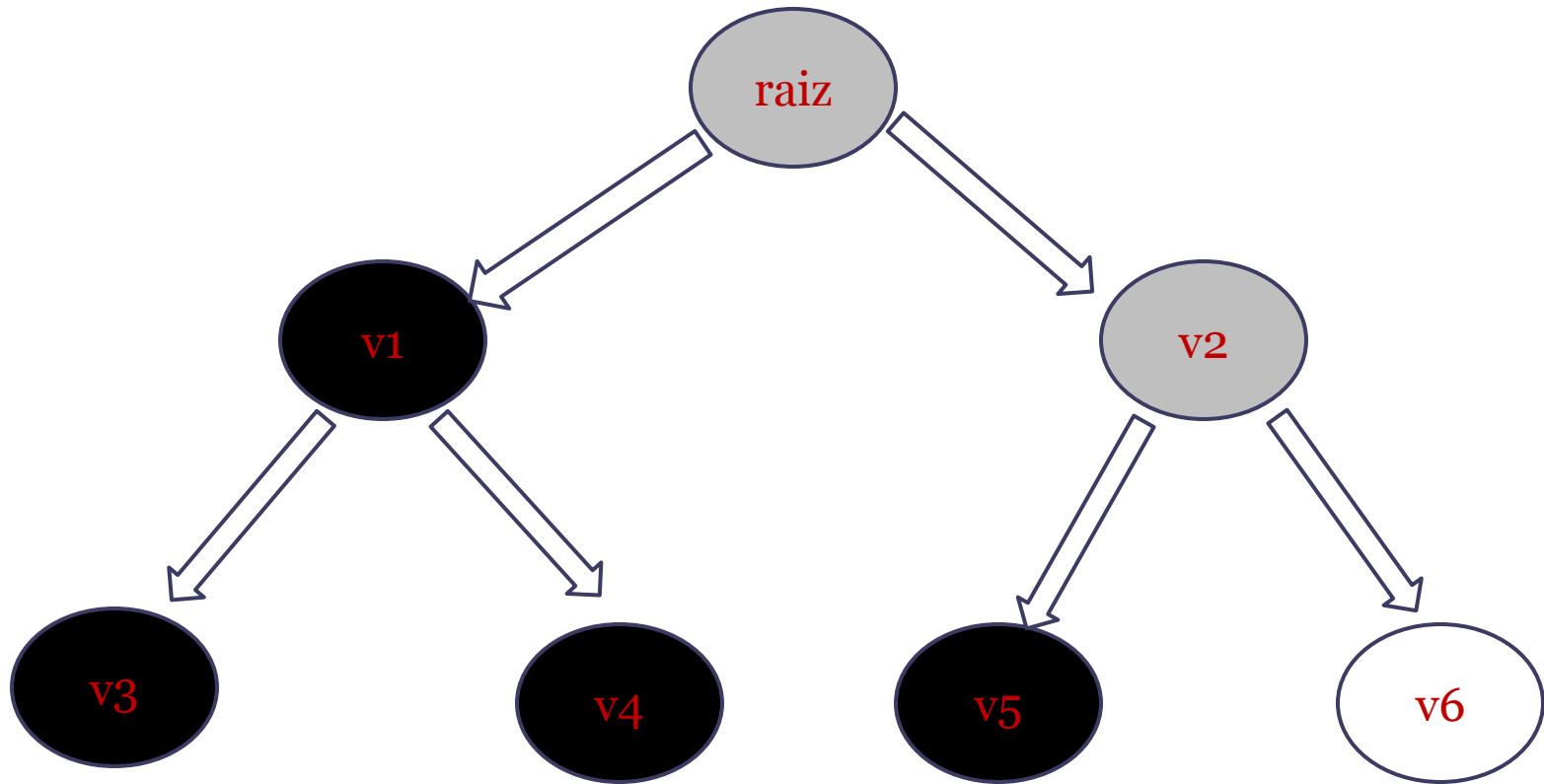
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



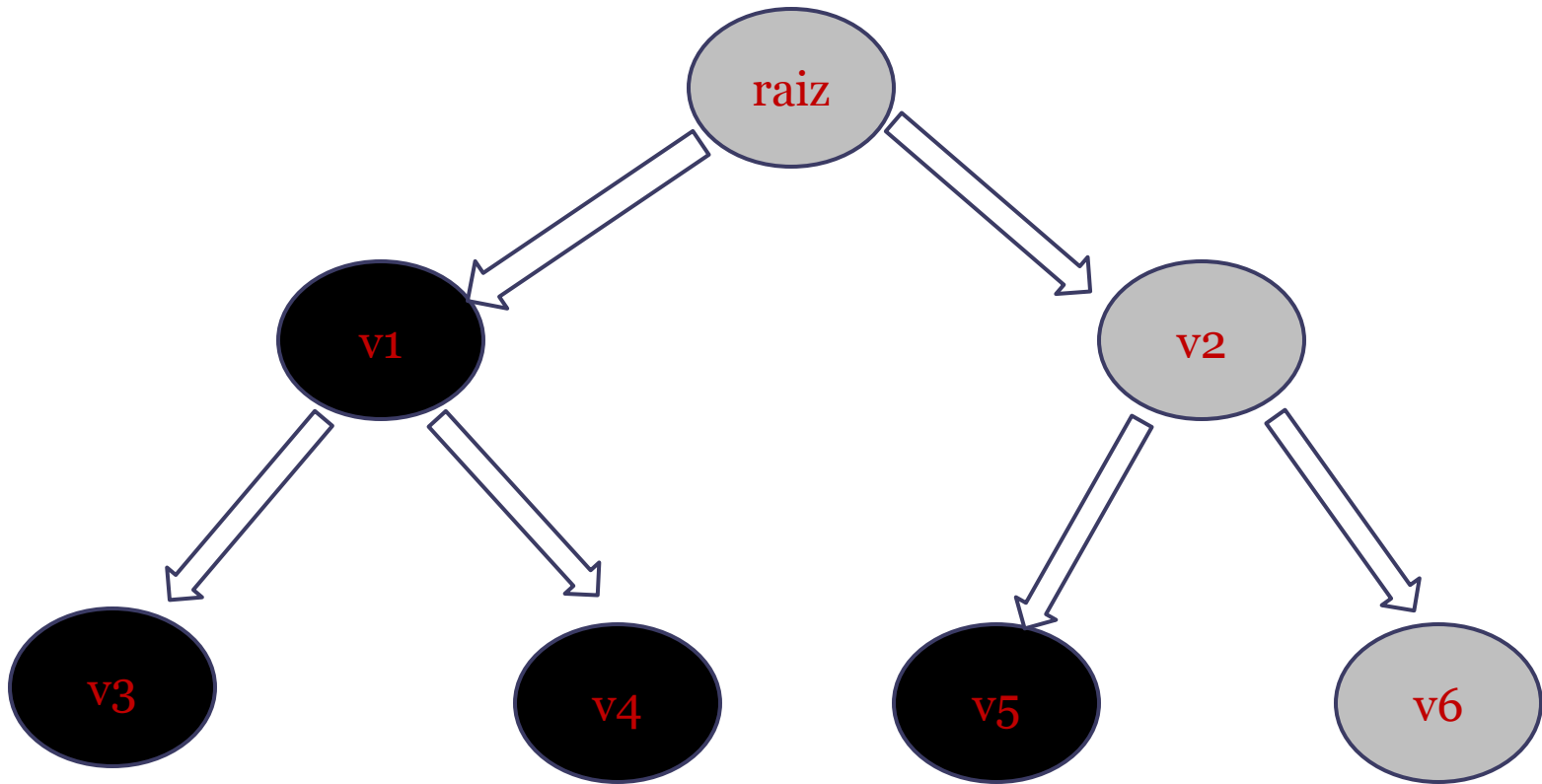
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



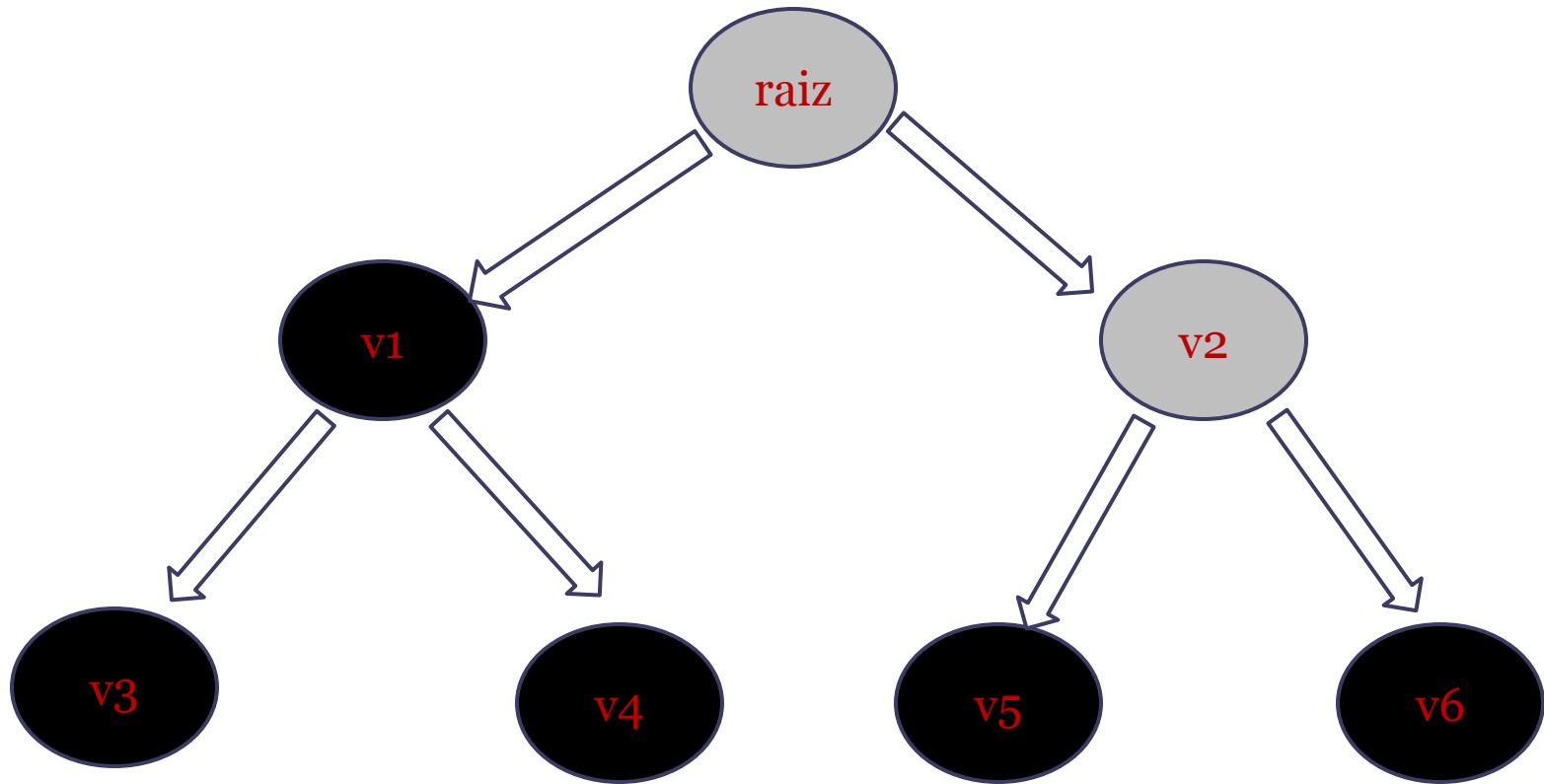
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



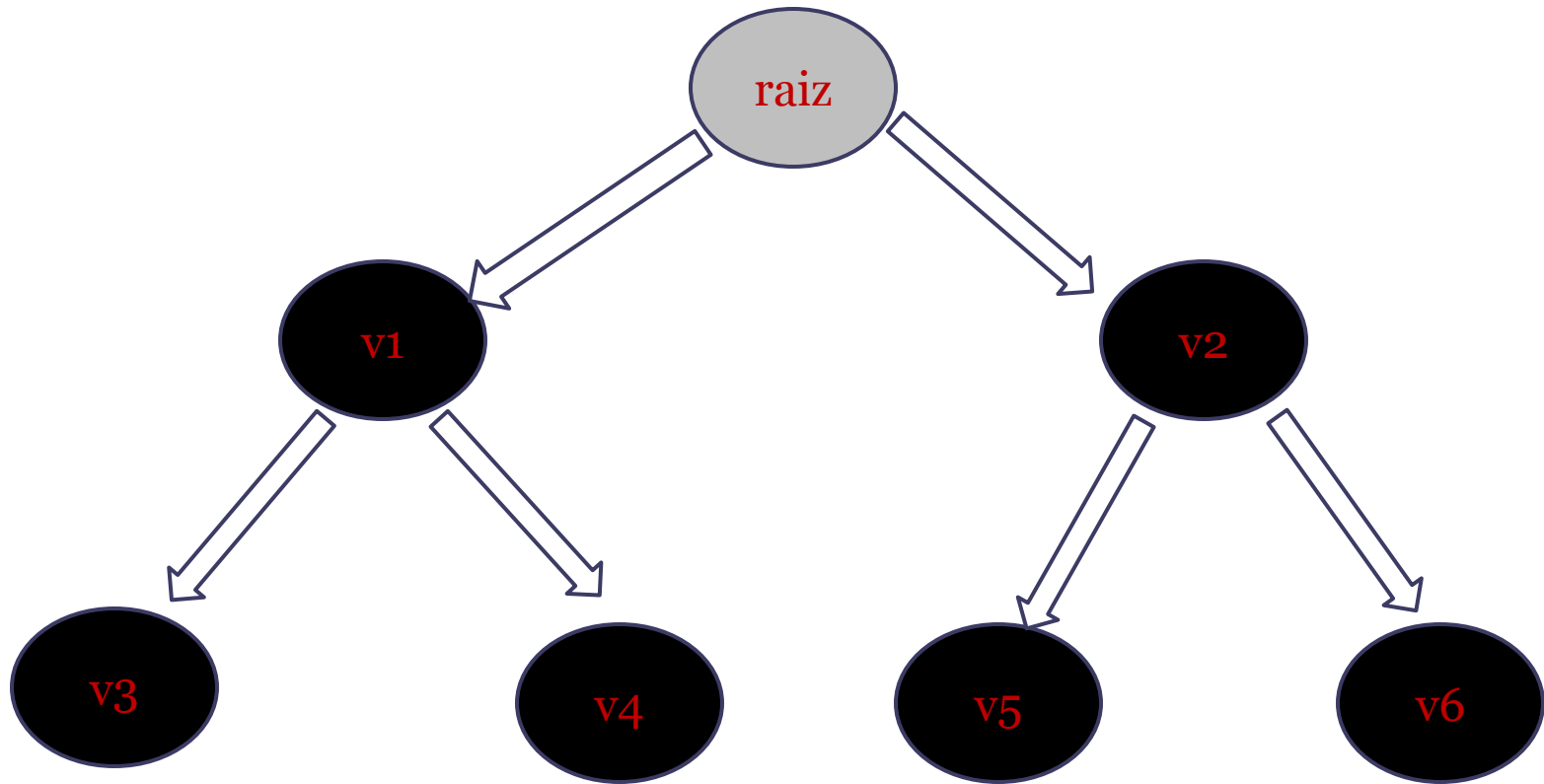
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



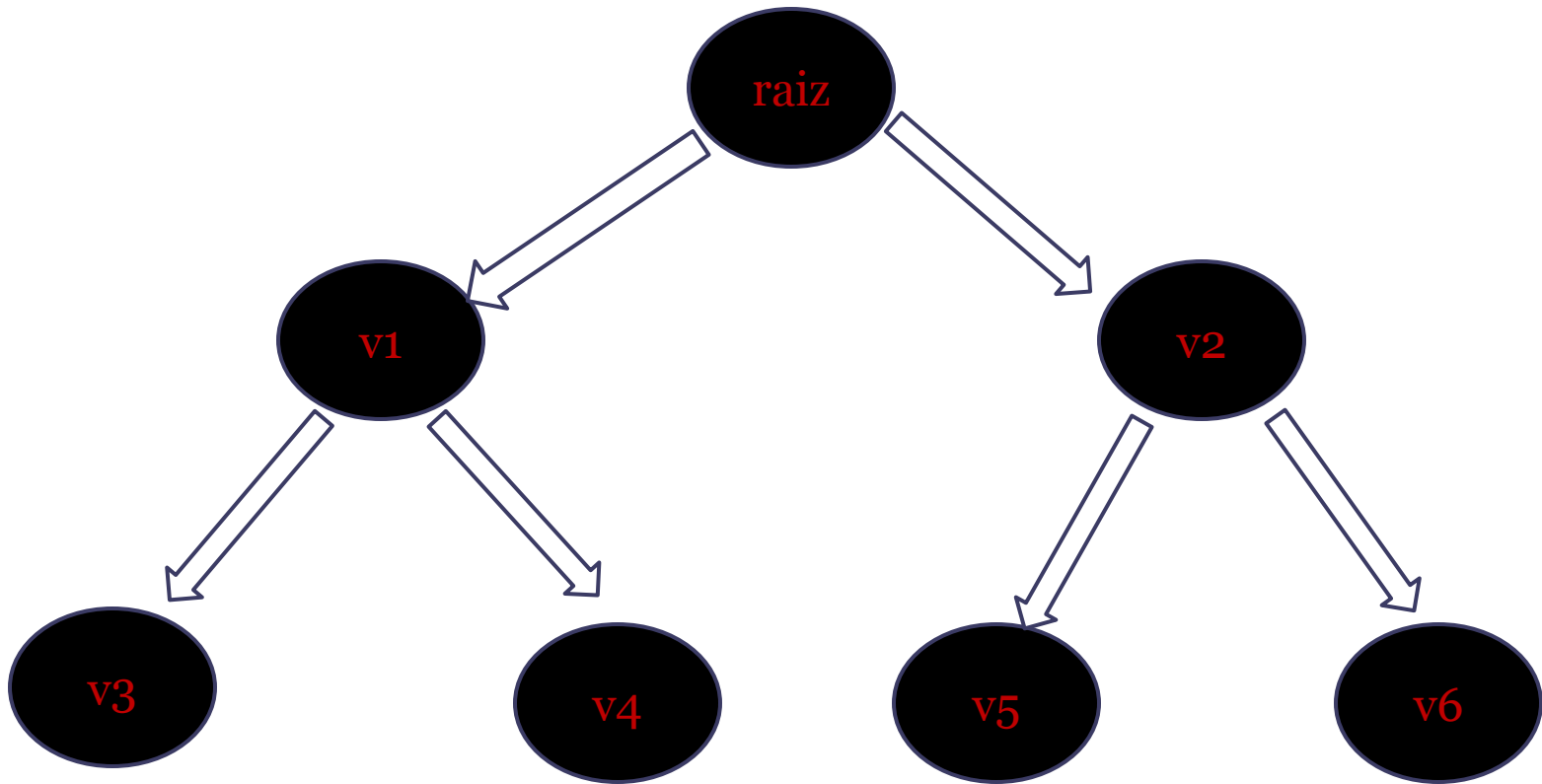
Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore



Aplicando Busca em Profundidade em uma Árvore

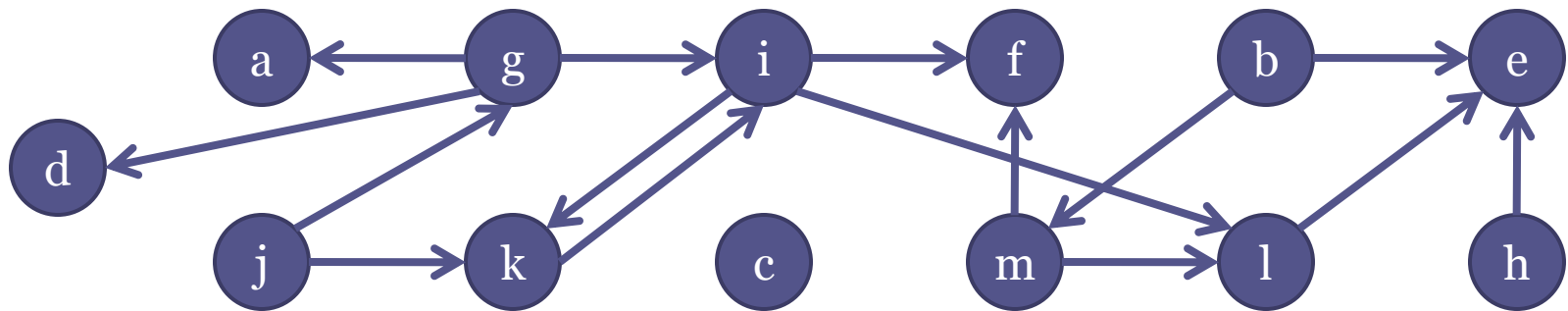


Exercícios



Exercício 01

- Realizar a busca em profundidade sobre o seguinte grafo:



- Considerar a ordem alfabética para qualquer decisão de ordem de elementos de conjuntos em qualquer parte do algoritmo.
- Ao final, indique o tempo de descoberta e de finalização de cada vértice do grafo

Exercício 02

- Se você fosse implementar uma busca em profundidade otimizada, **qual representação computacional escolheria?**
 - Matriz de Adjacência;
 - Matriz de Incidência;
 - Lista de Adjacência;
- Por quê? (justifique)

Exercício 03

- Implementar em pseudo-código a busca em profundidade sem utilizar recursão direta ou indireta;
 - Implementar utilizando estruturas iterativas...

Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.
 - [Capítulo 22.3](#)
- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;
 - [Capítulo 7.3](#)

