Universidade Federal de Alfenas

Algoritmos em Grafos

Aula 01 – História dos Grafos

Prof. Humberto César Brandão de Oliveira

Leonhard Euler

- Em 1735, Euler ganha fama mundial ao resolver um problema que por décadas foi desafio para os matemáticos da época (Série infinita da soma dos inversos dos quadrados – conhecido como problema da Basiléia);

- A maioria dos grandes matemáticos de seu tempo tentaram sem êxito encontrar o resultado desta série infinita;

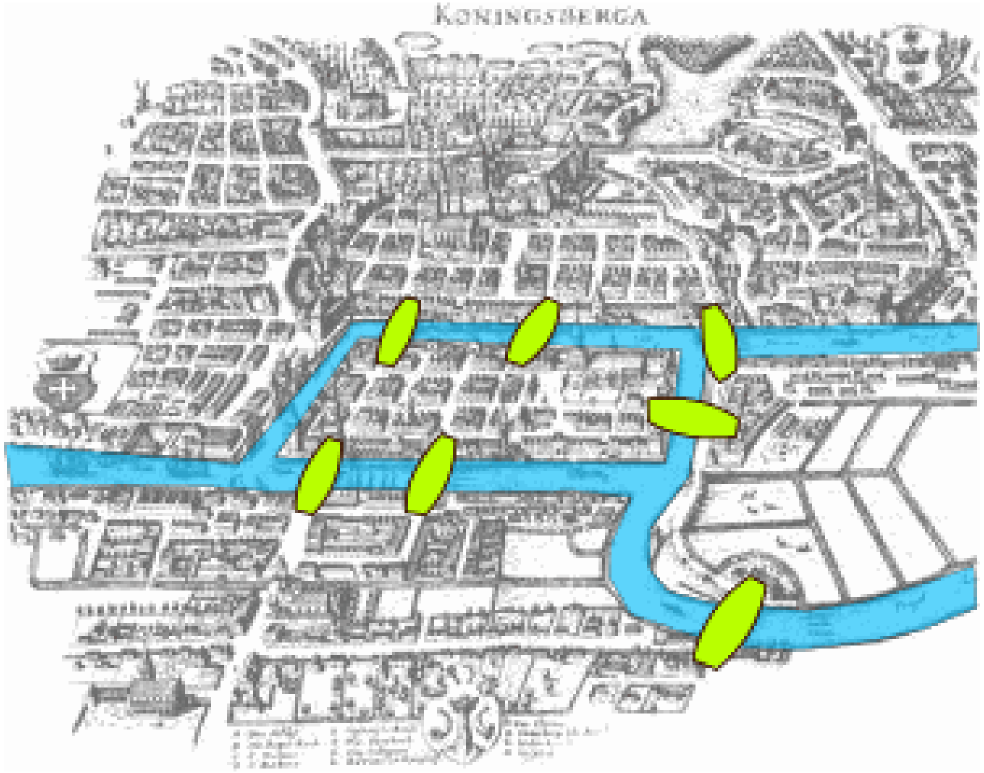
- Euler possuía apenas 28 anos na época;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Leonhard Euler

- Um ano mais tarde (1736), Euler resolve o problema conhecido como as Sete pontes de Königsberg.

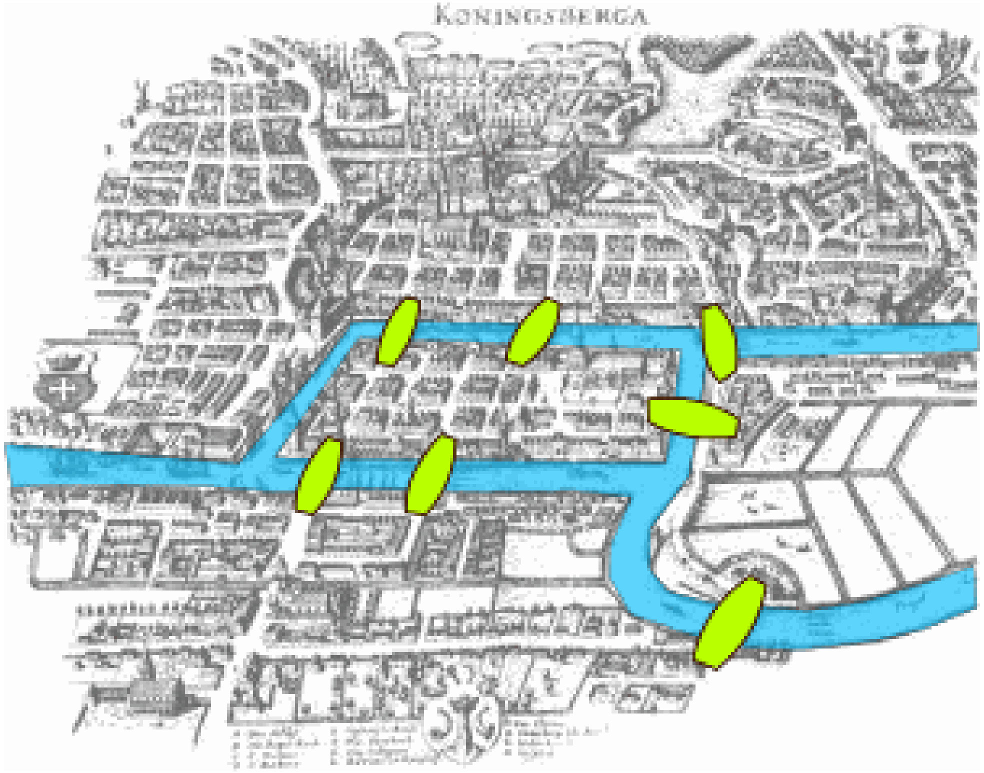
- Problema:
  - É possível que uma pessoa faça um percurso na cidade de tal forma que inicie e volte a mesma posição passando por todas as pontes somente uma única vez?



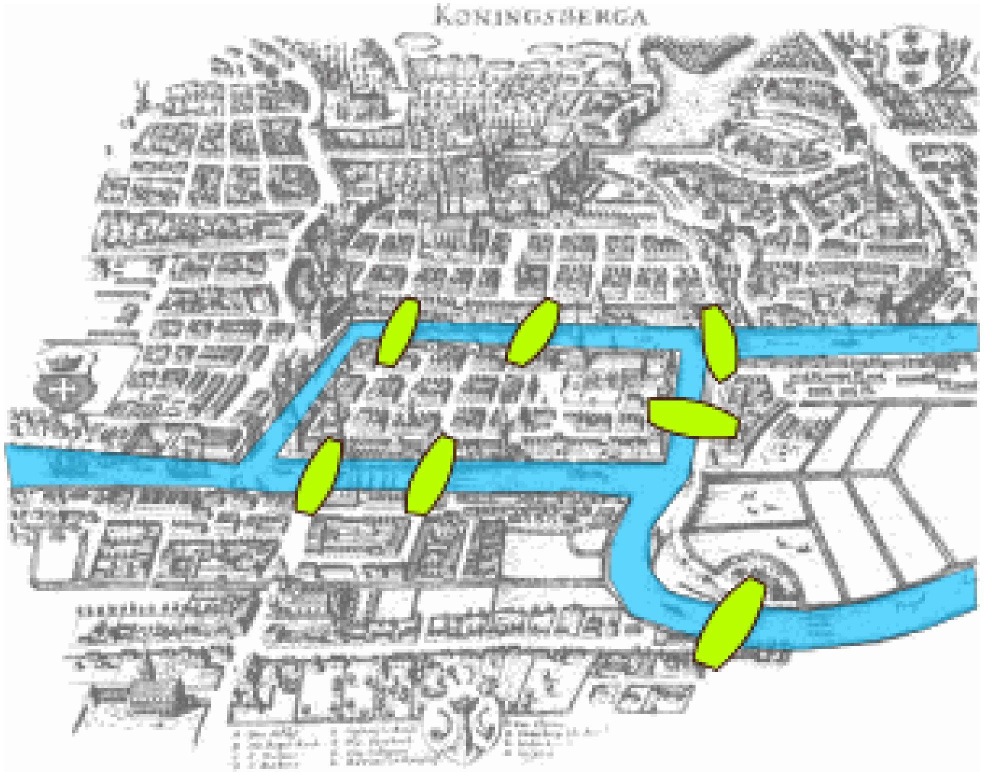
As Sete Pontes de Königsberg

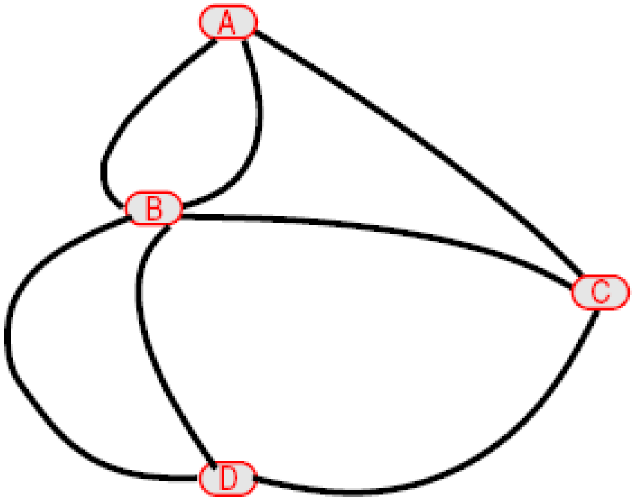
- Euler resolve este problema simplificando a forma de se enxergar o mapa:

- Cada faixa de terra representa um ponto, e as pontes são ligações entre os pontos.



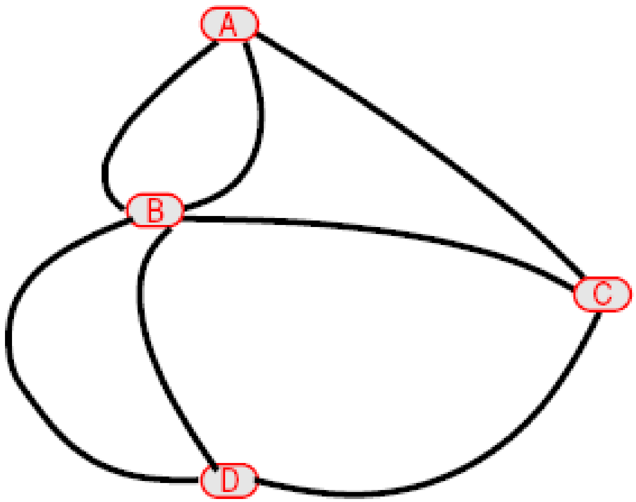
As Sete Pontes de Königsberg





As Sete Pontes de Königsberg

- Obviamente, existem duas respostas possíveis para o dilema:
  - Ou Existe solução...
    - Basta mostrar uma!!! Fácil... ☺
    - Será mesmo simples??? Para todo problema...
  - Ou não existe solução.
    - Pode se mostrar enumerando todos os caminhos possíveis, e mostrar que todos falham;
      - Árvore de possibilidades;
    - ou de forma mais elegante, provando através das características do grafo que não existe solução para o problema.

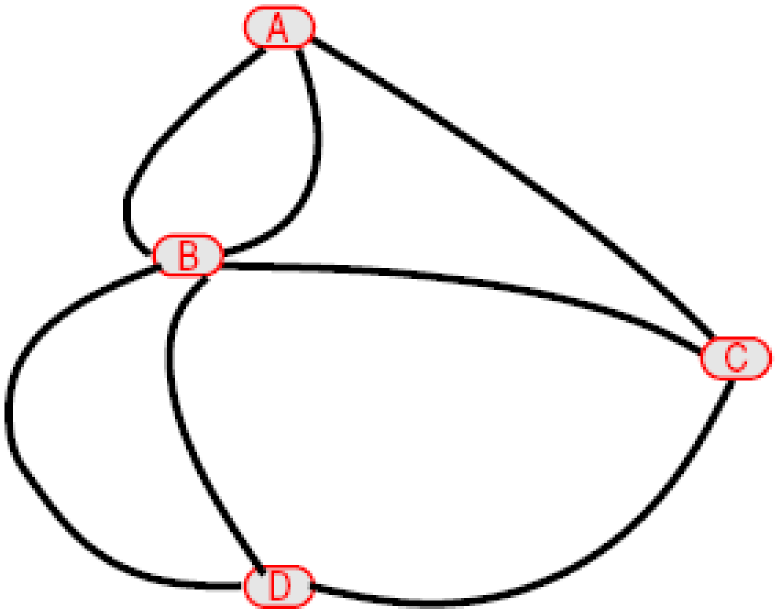


As Sete Pontes de Königsberg

- Aparentemente não existe solução;

- Partindo do vértice A, e percorrendo outros vértices, podemos ver a utilização de no mínimo duas arestas (pontes) “chegada” e a de “saída”.

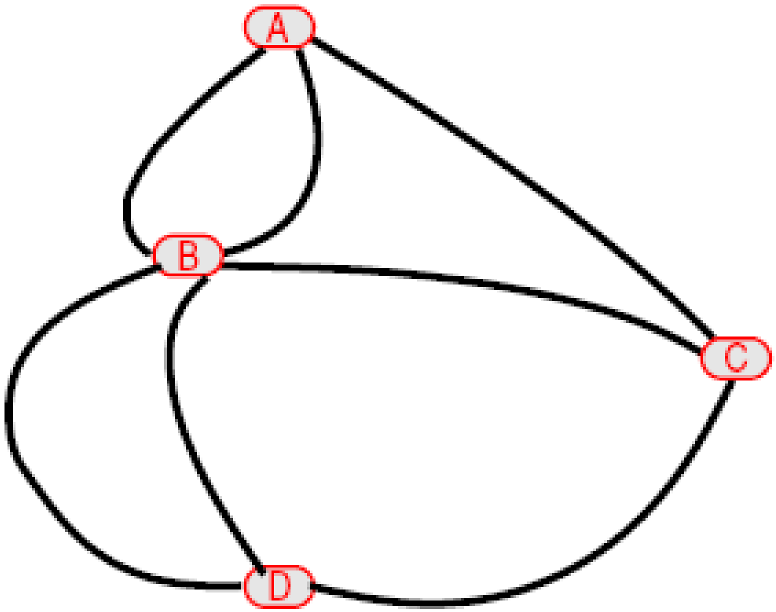
- Assim, se for possível achar uma rota que usa todas as arestas do grafo e começa e termina em A, então o número total de “chegadas” e “saídas” de cada vértice deve ser um valor múltiplo de 2.



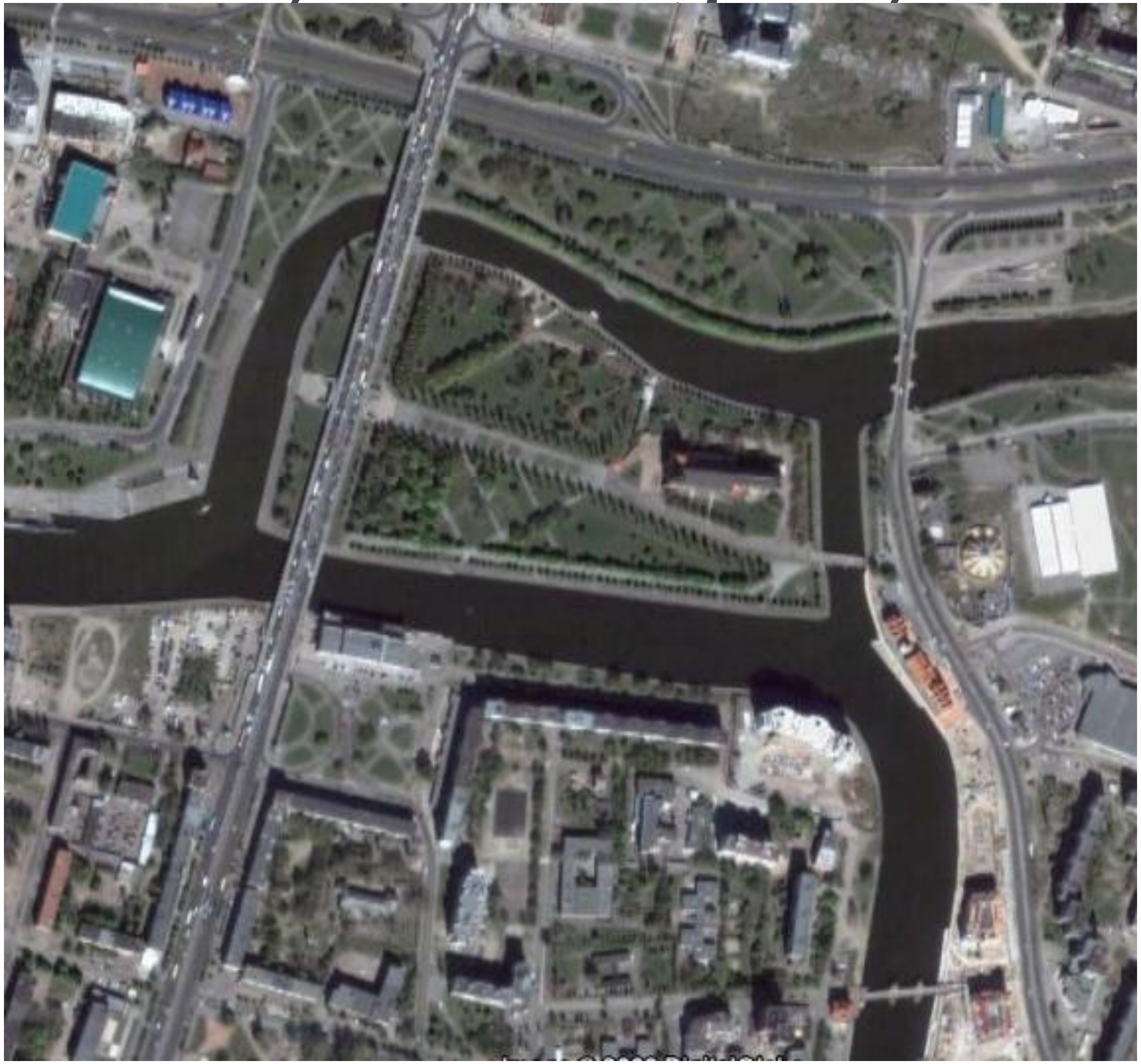
As Sete Pontes de Königsberg

- No entanto, temos:
  - grau(A) = grau(C) = grau(D) = 3;
  - grau(B) = 5.

- Assim, por este raciocínio <u>não é possível</u> percorrer as faixas de terra, passando por cada ponte uma única vez, retornando ao vértice de partida.



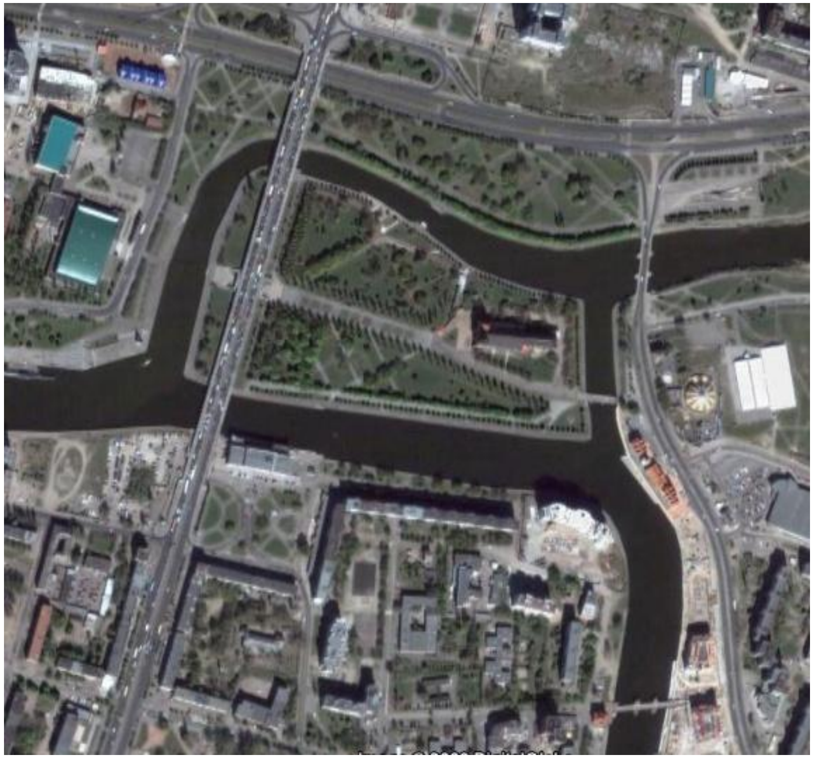
1736, Königsberg, Prússia
2007, Kaliningrad, Rússia



- Foto de 29/04/2007.
- A configuração das pontes está diferente.
- Mas agora existe caminho que satisfaz ao problema proposto no passado?

As Sete Pontes de Königsberg

- Verifique a beleza da solução de Euler...
- Mesmo para diferentes problemas, rapidamente verificamos que não existe tal ciclo...
    - Tal verificação pode ser efetuada em tempo polinomial, sem a necessidade de enumerar (implícita ou explicitamente todas as possibilidades)
- Quando existe tal ciclo, ele é classificado como ciclo Euleriano...



Leonhard Euler

curiosidades...

- Euler é atualmente considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos;
- Produziu mais de 1100 artigos e livros;
- Durante os últimos 17 anos de vida, ele ficou praticamente cego, quando produziu quase que metade de seus trabalhos.

Um pouco de história...

- Apesar da beleza da solução de Euler para o problema das sete pontes, a solução foi um detalhe na imensidão de contribuições do matemático;

- A resolução de um *toy problem*, e não aparentava a princípio ser de grande relevância para a ciência;

- Seu método de abstração ficou durante 150 anos oculto em meio ao seu mar de livros e artigos.

Um pouco de história...

- Por causa disso, a Teoria dos Grafos foi redescoberta diversas vezes durante a história, ou seja, inúmeros pesquisadores chegaram ao mesmo modelo de abstração de Euler;

- É interessante observar que o período transcorrido, entre a demonstração de Euler e a ultima década do século XIX, poucos trabalhos foram propostos com tal abstração (em 150 anos!!!);

Um pouco de história...

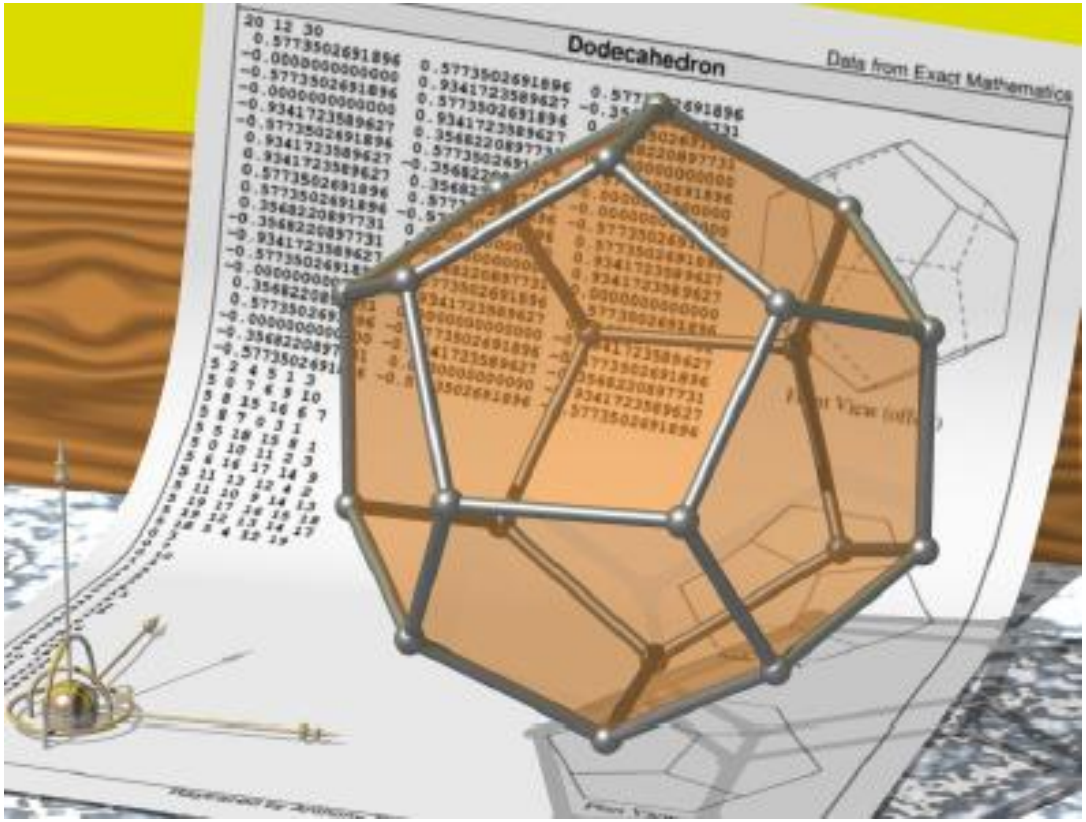
- 1847 – Kirchhoff utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos, criando a teoria das árvores;

- 1857 – Cayley seguiu a mesma linha de Kirchhoff, mas de forma independente, aplicando a teoria em química orgânica (isômeros dos hidrocarbonetos);

- 1869 – Jordan estudou as árvores, de um ponto de vista matemático;

Um pouco de história...

- 1859 – Hamilton propôs um *toy problem*, a princípio sem aplicação prática. A busca por um circuito fechado em um dodecaedro regular;



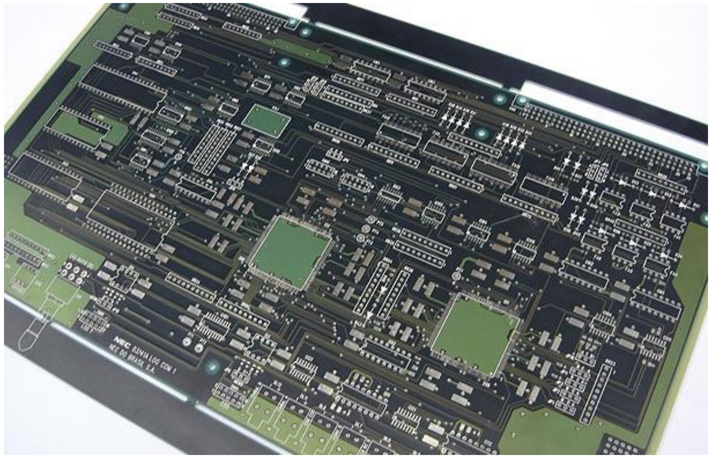
Um pouco de história...

- Diferentemente do problema de Euler (que não se repete aresta, e pode se repetir vértices), o problema de Hamilton não permite a repetição de vértices, e conseqüentemente também não se repetem arestas;

- Atualmente, o ciclo Hamiltoniano é utilizado na definição formal do problema do Caixeiro Viajante (*um dos mais importantes e complexos problemas já descritos – definitivamente, o mais estudo problema de otimização combinatória*);

- É interessante observar que os problemas de Euler e Hamilton encontraram aplicações práticas 100 anos mais tarde, na área de Pesquisa Operacional;

Um pouco de história...
Aplicação do ciclo Hamiltoniano



- Imagine que você precisa construir uma placa de circuito impresso.

- Esta possui inúmeros furos para o encaixe de seus componentes.

- Suponha que você possui a disposição um braço eletrônico para perfurar a placa e precisa descrever um algoritmo para encontrar a ordem perfuração dos buracos;

Um pouco de história...
Aplicação do ciclo Euleriano

- Imagine que você precisa entregar encomendas em todas as ruas de uma região de Alfenas.

- Existe a possibilidade de encontrar uma rota sem repetir ruas inutilmente?
  - Minimizando assim o trajeto a ser percorrido..

Um pouco de história…

- 1879 – Kempe procurou demonstrar a "Conjectura das 4 cores". Trata-se de provar que todo mapa desenhado sobre uma superfície 2D e dividido em um número qualquer de regiões pode ser colorido com um máximo de 4 cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor;
  - Mais tarde (1890) o matemático Heawood mostrou que a "prova" de Kempe estava errada;

Um pouco de história…

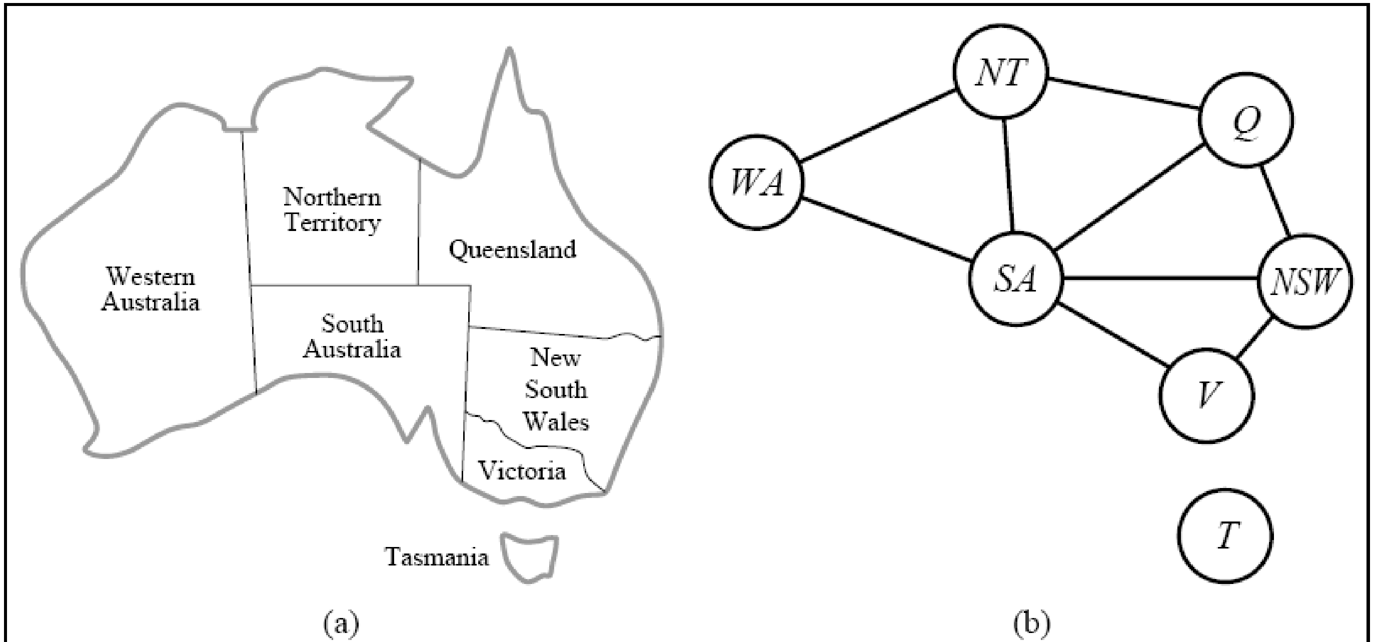


Figure 5.1 (a) The principal states and territories of Australia. Coloring this map can be viewed as a constraint satisfaction problem. The goal is to assign colors to each region so that no neighboring regions have the same color. (b) The map-coloring problem represented as a constraint graph.

Figura do livro
Artificial Intelligence – A modern approach
(AIMA)

Um pouco de história...

- 1880 – Tait divulgou também uma "prova" da coloração de mapas utilizando apenas 4 cores;
  - Infelizmente ela foi baseada em uma conjectura falsa;

- 1890 – Heawood mostrou que a "prova" de Kempe estava errada;

- 1890 – Heawood consegue uma prova utilizando 5 cores para coloração de qualquer mapa 2D;

Um pouco de história…

- Mais tarde, uma prova foi divulgada mostrando que com 4 cores é possível colorir qualquer mapa com no máximo 25 regiões.

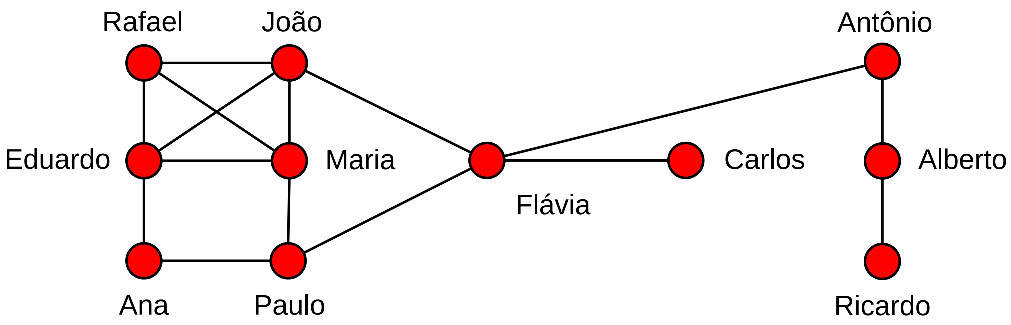
- Na prática, a busca por esta prova não teve impacto muito relevante;

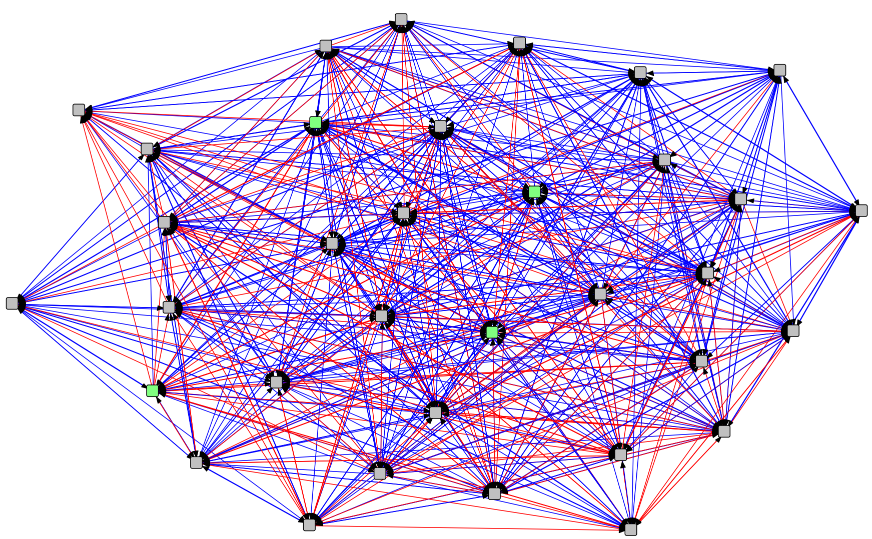
- A vantagem foi o grande desenvolvimento na teoria dos grafos neste período, durante as inúmeras tentativas dos matemáticos sobre o problema;

Exemplos de Aplicações

Exemplo de Aplicação: Sociograma

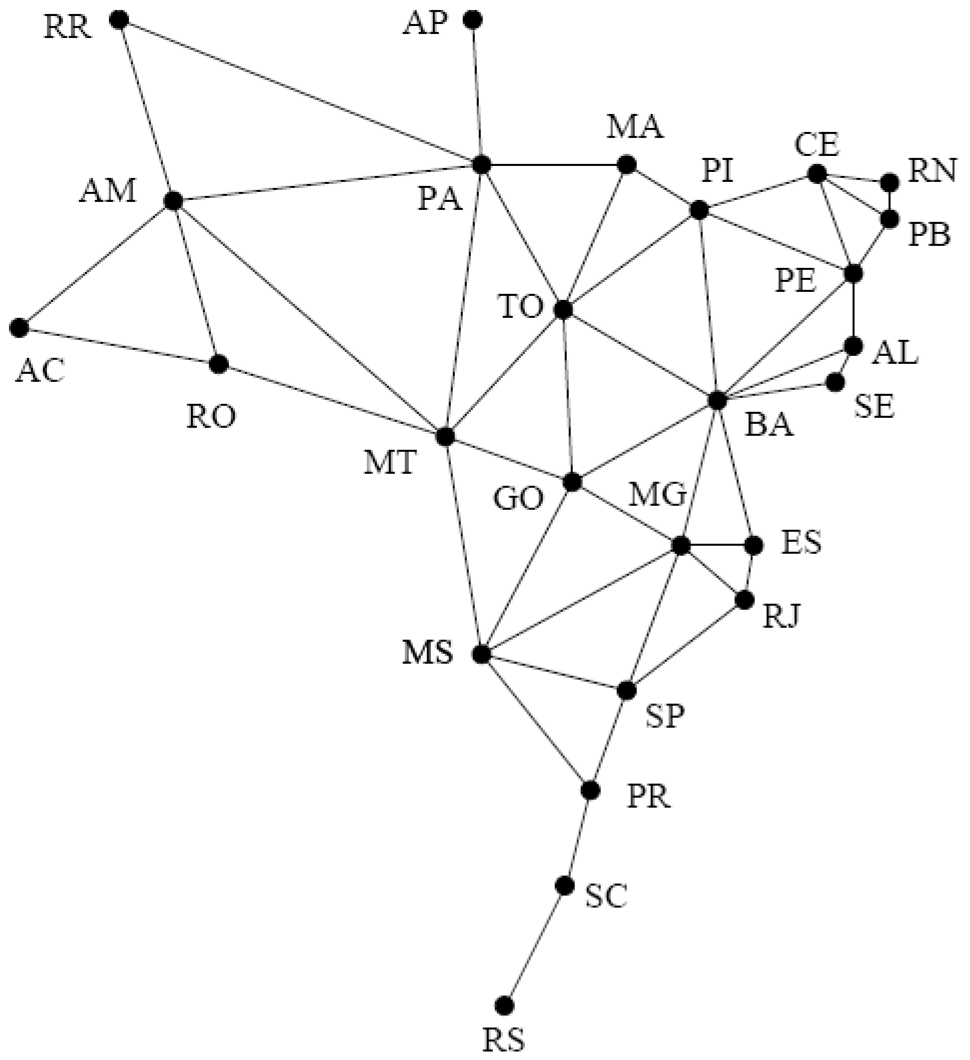
- Os sociogramas representam relacionamentos entre indivíduos;





Exemplo de aplicação: Representação de Localidades

- A representação é base para inúmeras aplicações em grafos...



Exemplo de aplicação:

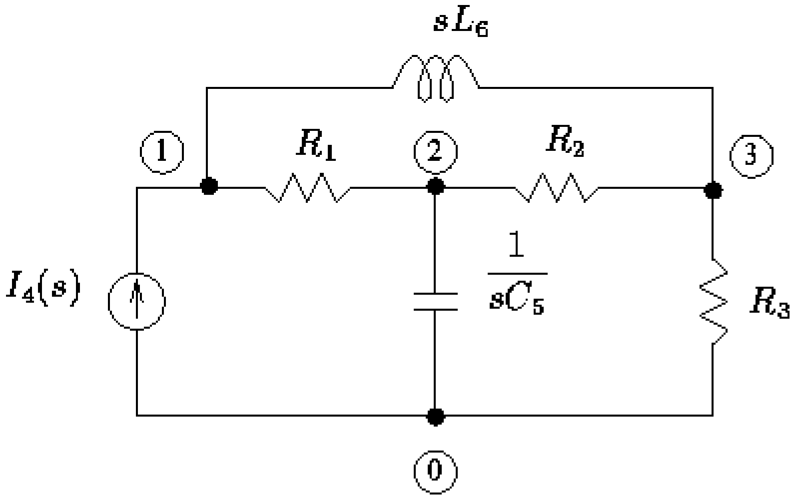
Caminho mínimo

- Exemplo:
  - Caminho mínimo entre BH e Alfenas calculado pelo *Google Maps*.

- O melhor algoritmo para este problema foi proposto por Dijkstra;

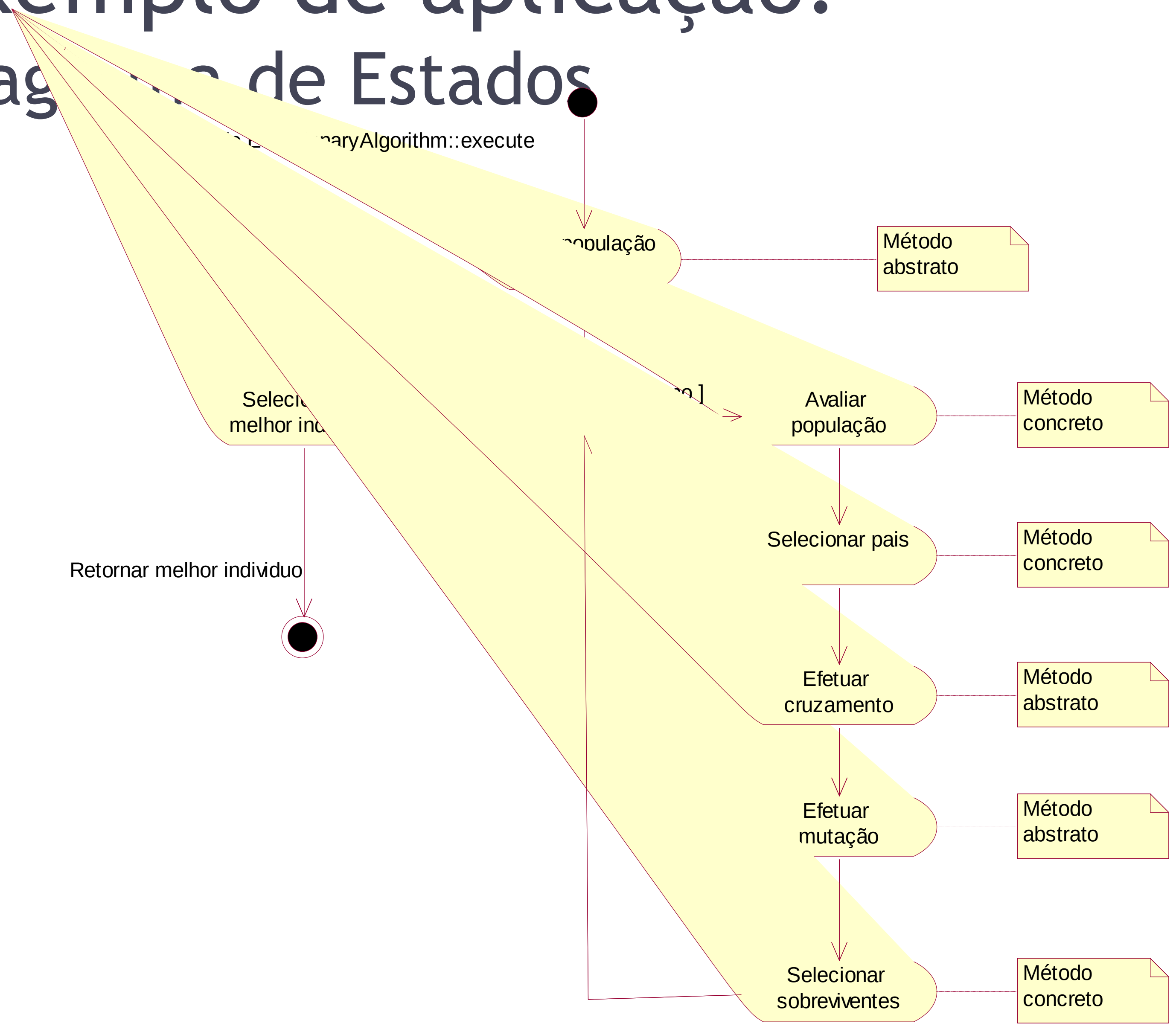
- O mesmo que propôs diversos algoritmos e estruturas na área de Sistemas Operacionais;

Exemplo de aplicação:
Circuitos elétricos



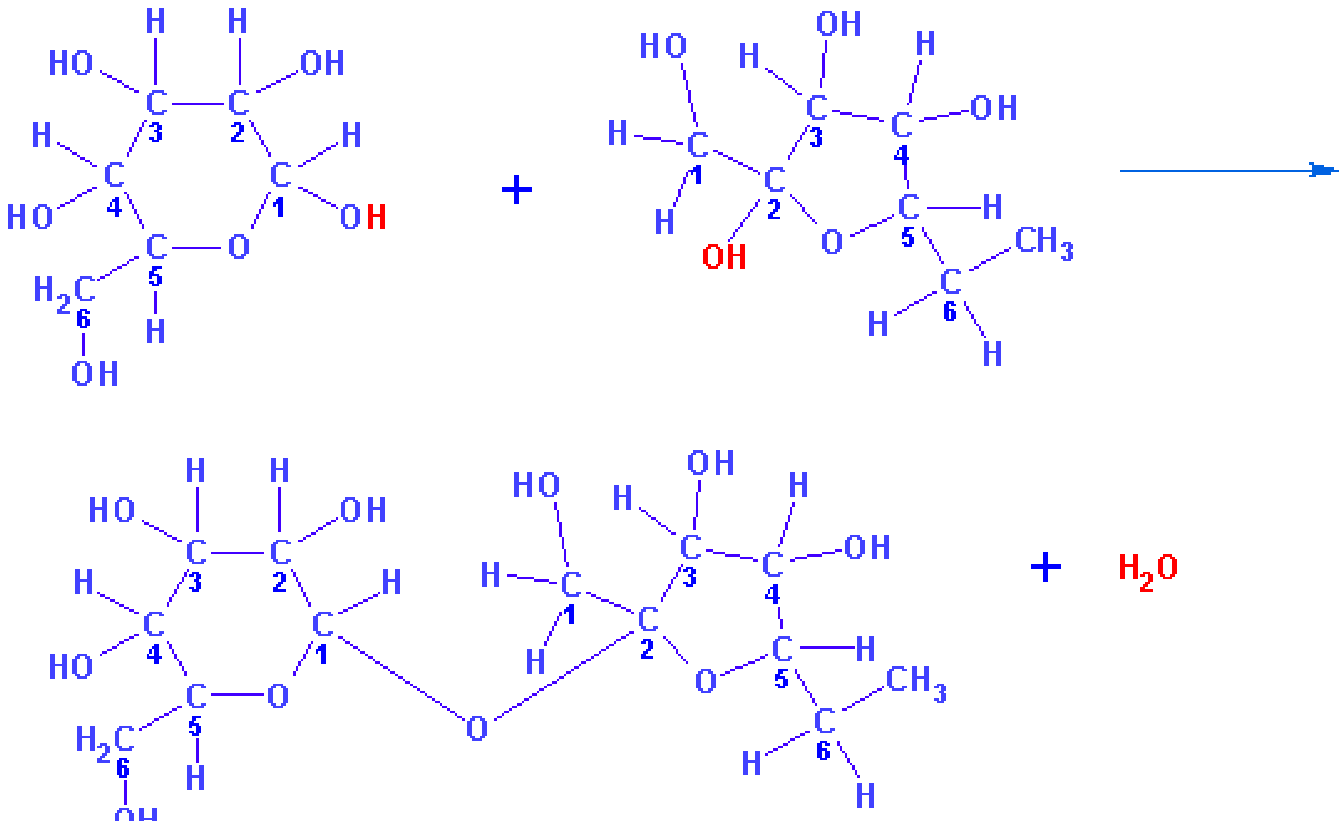
- Atualmente existem muitos problemas em aberto dedicados a prevenção de falhas no sistema elétrico de grandes metrópoles.

Exemplo de aplicação:
Diagrama de Estados



Exemplo de aplicação:
Química molecular

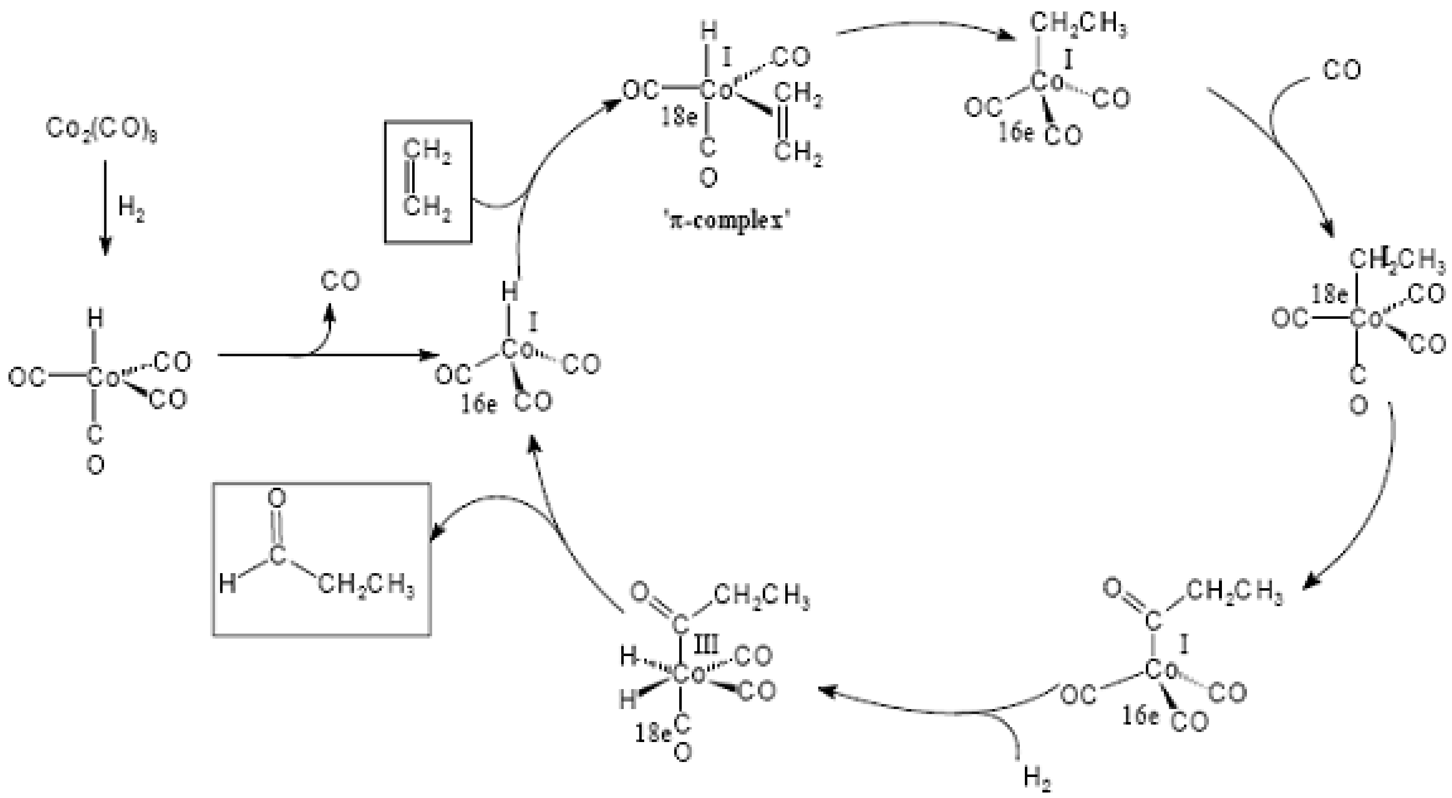
- Representação bidimensional de moléculas utilizando grafos...



molécula de sacarose

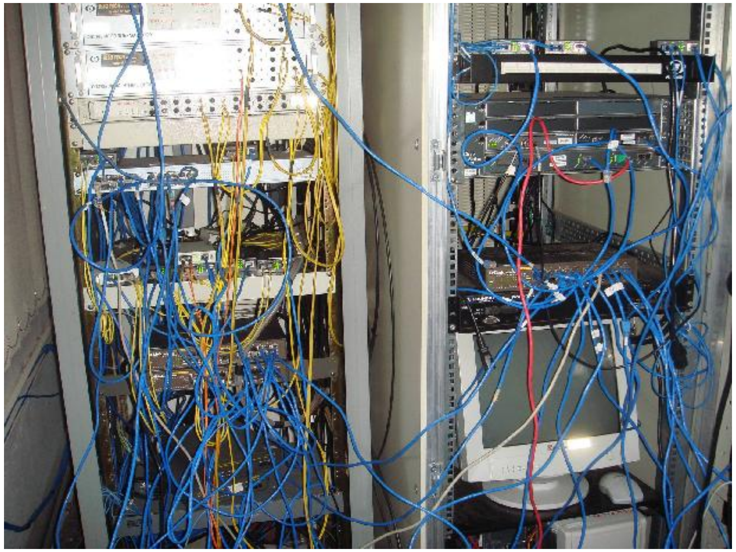
Exemplo de aplicação:
Química – Ciclos catalíticos

- Ciclos catalíticos...



Exemplo de aplicação:
Redes de computadores

- Apesar das redes de computadores serem complexas no mundo real, onde inúmeros fatores descrevem o ambiente....



- É necessária uma forma de abstração para a eficiente comunicação dos computadores.

Exemplo de aplicação:
Redes de computadores

- Redes de computadores utilizam tabelas de encaminhamento para o roteamento de pacotes...

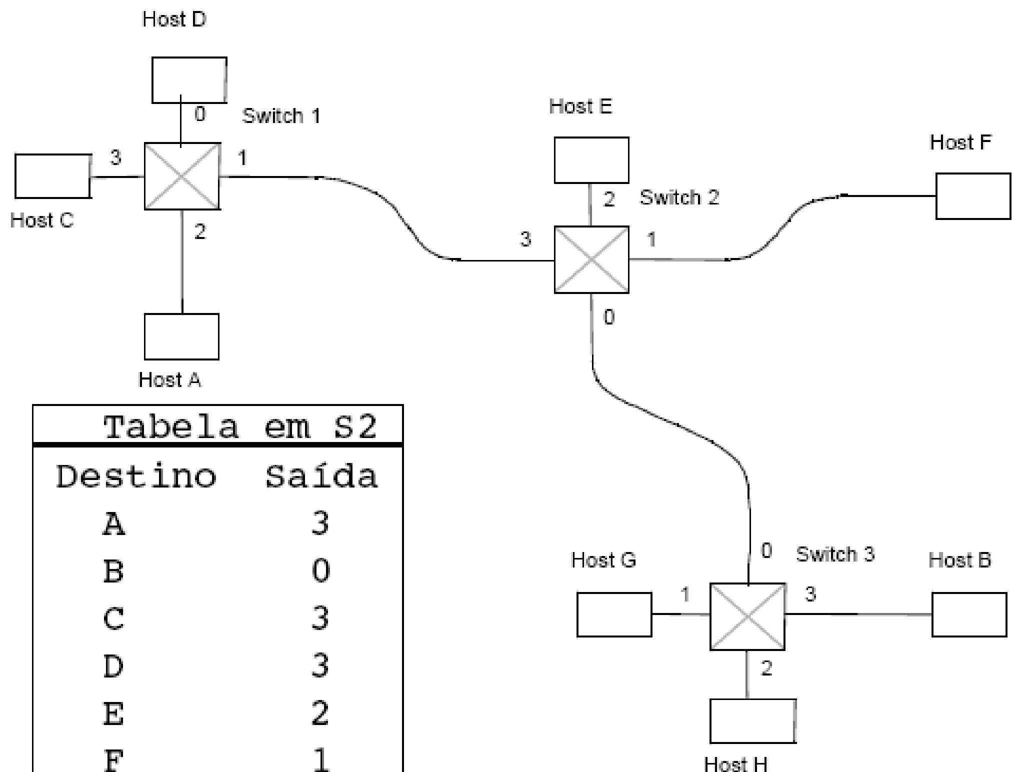


Tabela em S2	
Destino	Saída
A	3
B	0
C	3
D	3
E	2
F	1
G	0
H	0

Exemplo de aplicação: Redes de computadores

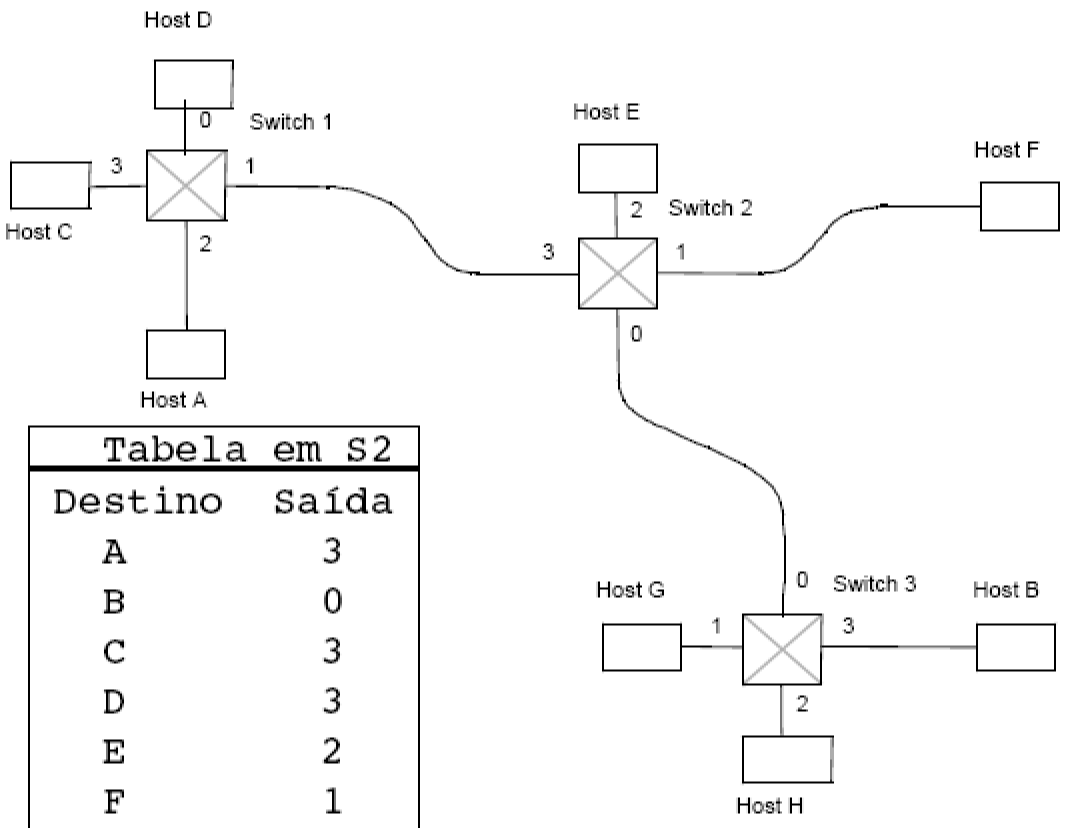
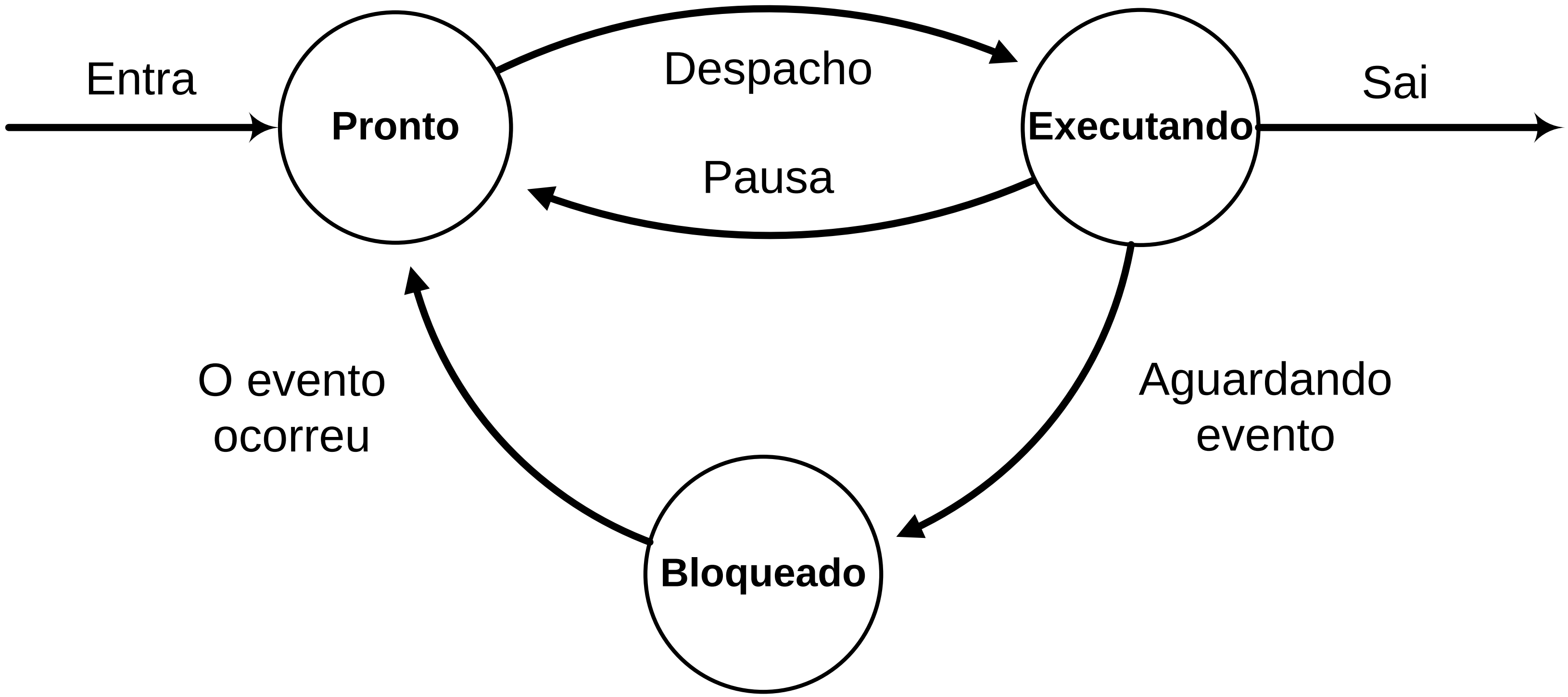


Tabela em S2	
Destino	Saída
A	3
B	0
C	3
D	3
E	2
F	1
G	0
H	0

- Que informações podemos utilizar para montar as tabelas de encaminhamento de cada *switch*?

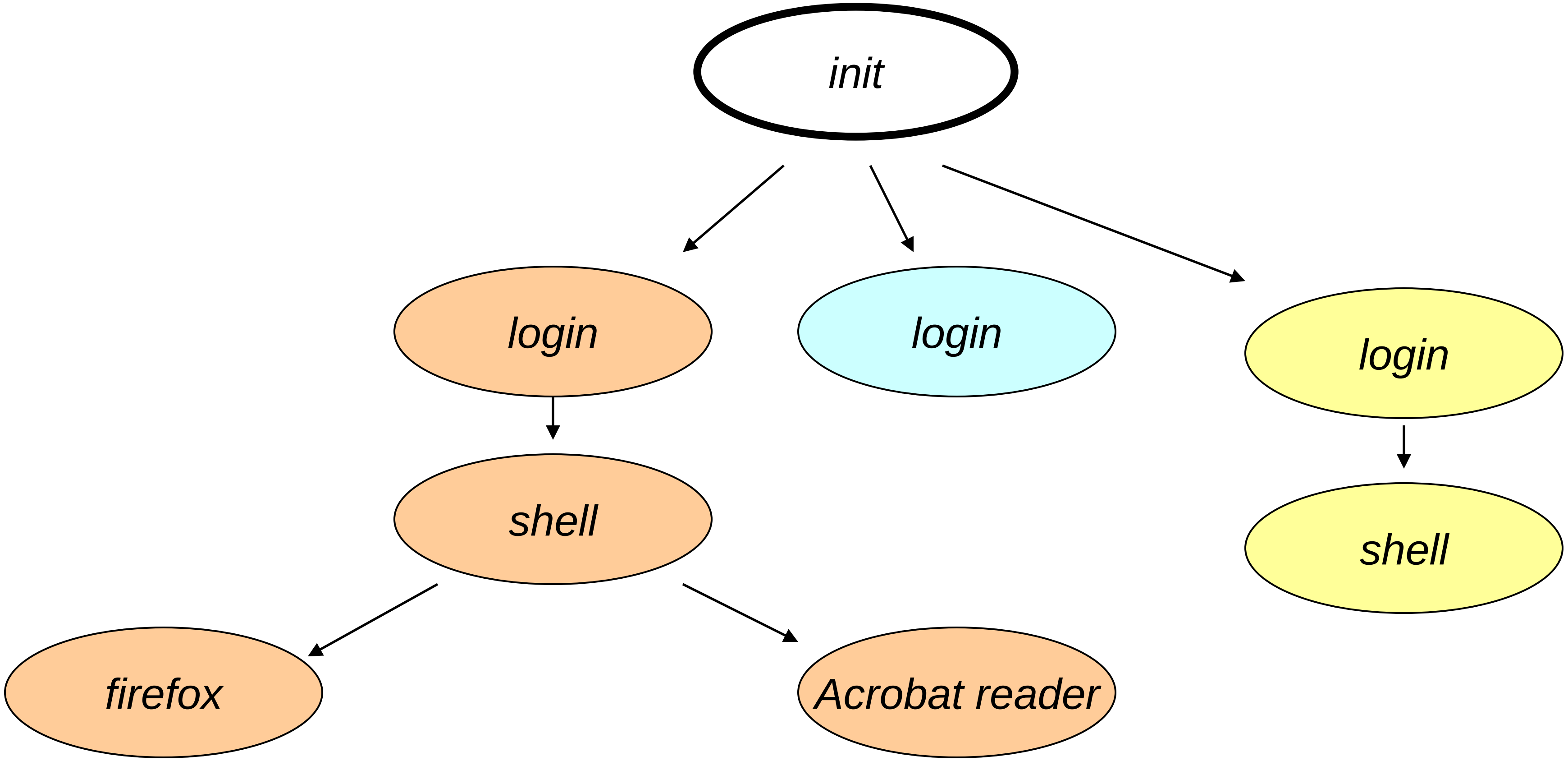
Exemplo de aplicação: Sistemas Operacionais

- Abstraindo... Entendendo os estados de processos/*threads*...



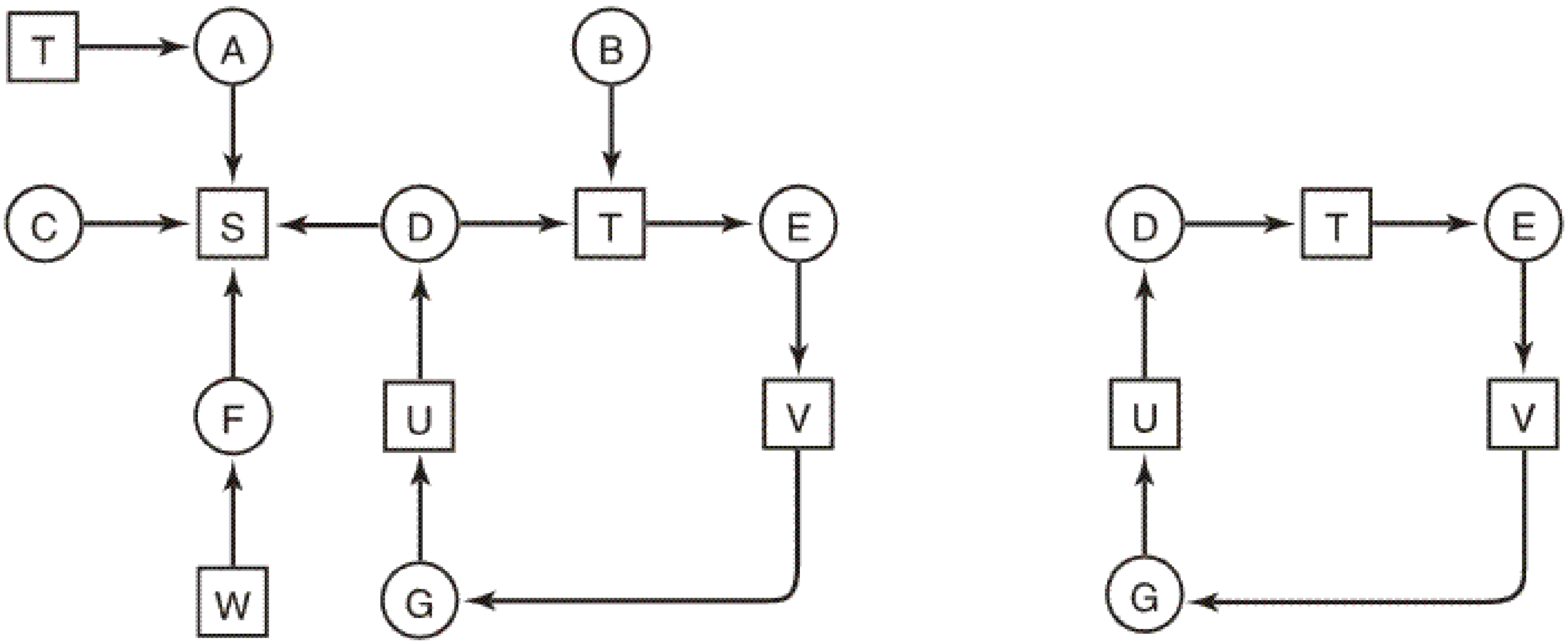
Exemplo de aplicação:
Sistemas Operacionais

- Hierarquia de Processos – Árvores são grafos especiais...



Exemplo de aplicação:
Sistemas Operacionais

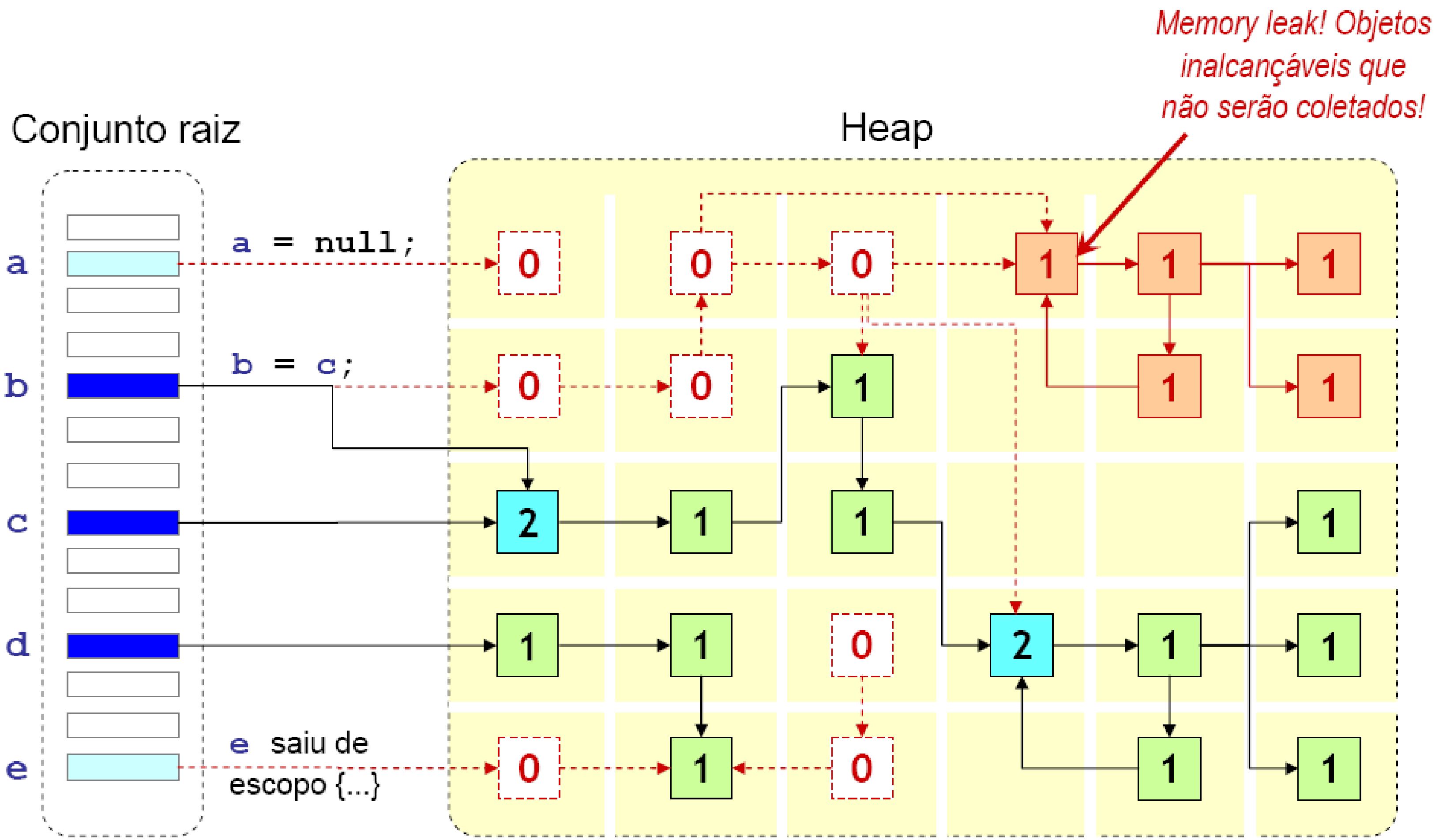
- Detecção de *deadlock* através de ciclo no grafo...



(a) (b)

Exemplo de aplicação:
Programação...

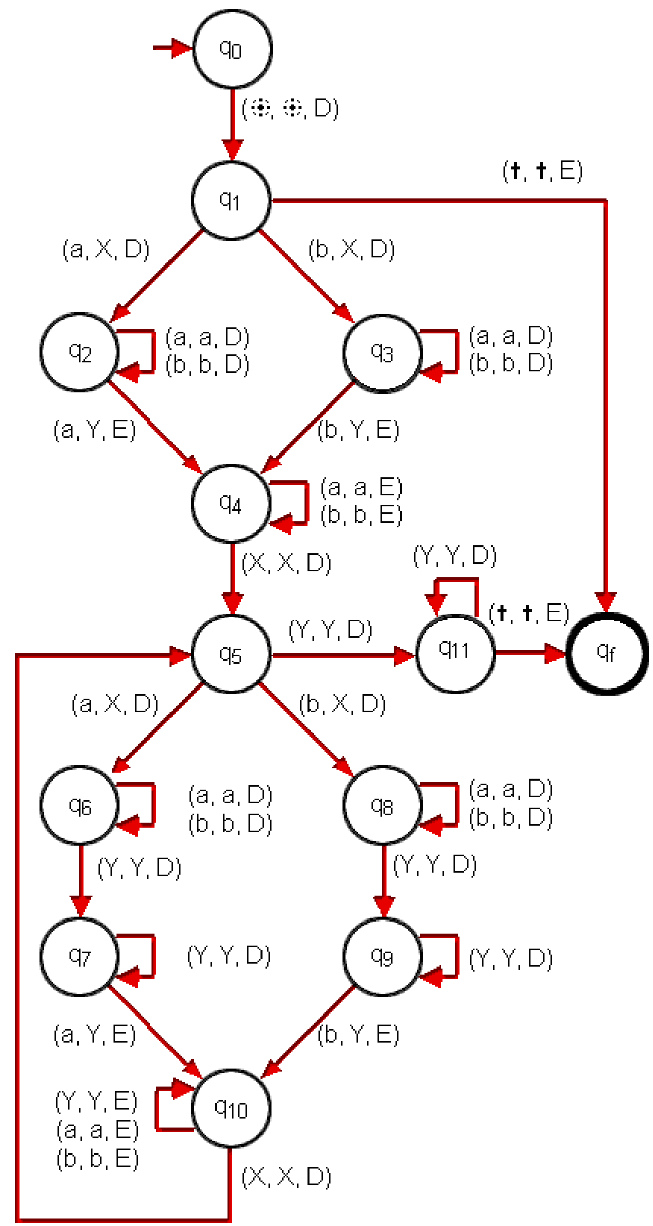
- Garbage collector - Java



Exemplo de aplicação:
Teoria da Computação

- Reconhecimento de textos de uma língua/linguagem qualquer.
  - Ex.: C++, Java, Português...

- Aplicação:
  - Detecção de erros sintáticos em frases de um documento por Máquinas de Turing ou Máquina equivalente.



Exemplo de aplicação:
Teoria da Computação

- Reconhecimento de linguagens...

Teoria de Autômatos: Linguagem formal e gramática formal			
Hierarquia Chomsky	Gramática	Linguagem	Reconhecedor
Tipo-0	Estrutura de frase	Recursivamente enumerável	**Máquina de Turing**
--	Estrutura de frase	Recursiva	**Máquina de Turing**
Tipo-1	Sensíveis ao contexto	Sensíveis ao contexto	Máquina de Turing com memória limitada
Tipo-2	Livre de contexto	Livre de contexto	Autômato com pilha
Tipo-3	Regular	Regular	Autômato finito

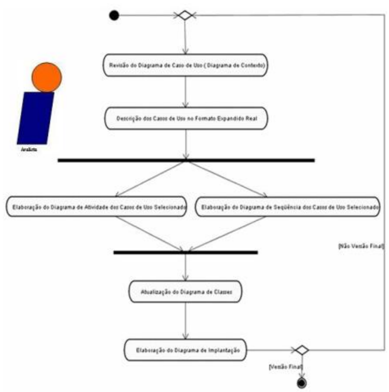
- Todas estes estruturas (reconhecedores) possuem representação através de Grafos.

Exemplo de aplicação:
Teoria da Computação

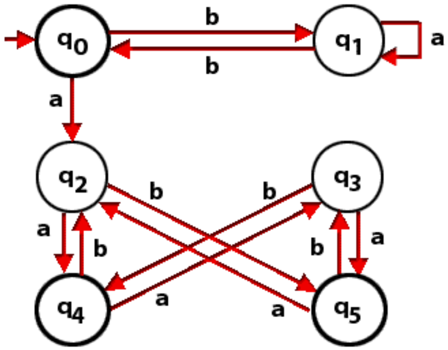
Teoria de Autômatos: Linguagem formal e gramática formal			
Hierarquia Chomsky	Gramática	Linguagem	Reconhecedor
Tipo-0	Estrutura de frase	Recursivamente enumerável	**Máquina de Turing**
--	Estrutura de frase	Recursiva	**Máquina de Turing**
Tipo-1	Sensíveis ao contexto	Sensíveis ao contexto	Máquina de Turing com memória limitada
Tipo-2	Livre de contexto	Livre de contexto	Autômato com pilha
Tipo-3	Regular	Regular	Autômato finito

- Curiosidade: Recentemente uma tribo da Amazônia colocou em xeque toda teoria de Chomsky (a teoria, não a hierarquia..)
- Eles não conseguem gerar sentenças recursivas;
- http://www1.folha.uol.com.br/folha/ciencia/ult306u16297.shtml
- Segundo Chomsky, todos os humanos possuem a capacidade de gerar frases recursivas. Característica gravada no DNA.

Exemplo de aplicação:
Teoria da Computação e Engenharia de Software

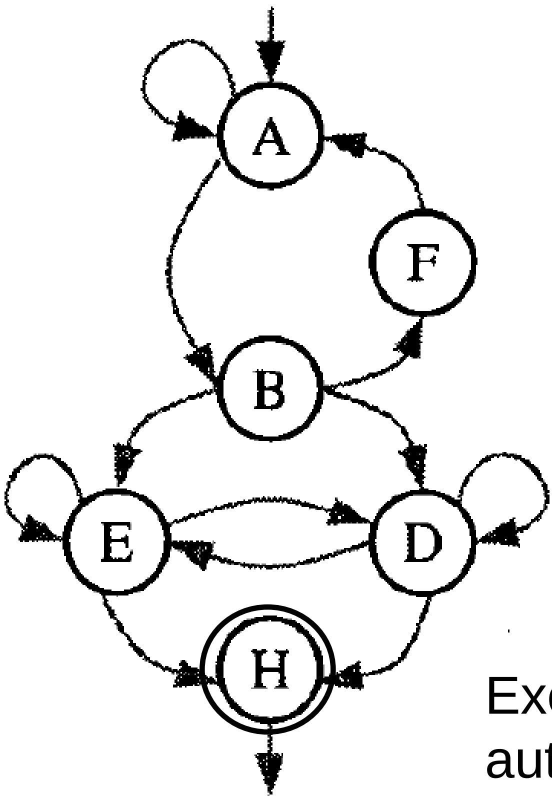


Um requisito gera um diagrama de estados (UML)

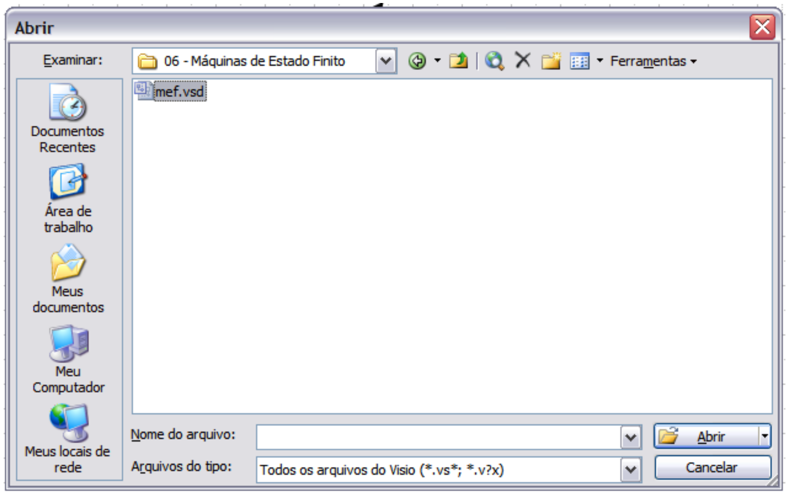


Um autômato

Exemplo de aplicação:
Teoria da Computação e Engenharia de Software
Caso: Abrir arquivo



A: File
B: Open
D: Name
E: Select
F: Cancel
H: Open



Exemplo de seqüências reconhecidas pelo autômato:
w1: AB, BE, EH (menor palavra da linguagem)
w2: AA, AA, AA, AB, BF, AB, BE, EH

Exemplo de aplicação:
Teoria da Computação e Engenharia de Software
<u>Caso: Abrir arquivo</u>

- Engenharia de Teste:
  - Validar entradas no MS-Word para celulares Nokia;

- Teste de software tem uma importância singular na programação para celulares;

  - Imaginem um *recall* para atualizar o software da agenda telefônica de todos os celulares da Motorola....

- Este simples exemplo envolve Teoria dos Grafos, Teoria da Computação e Engenharia de Software...
  - <u>Seja multidisciplinar dentro da Computação!!!</u>

Atualmente...

Grafos na atualidade

- Da “era Euler” até os dias atuais, a teoria dos grafos se desenvolveu rapidamente;
- Eu a considero uma teoria estável e de grande bagagem para resolução da maioria dos problemas práticos;
- Apesar da limitação computacional:
  - Seja ela de complexidade,
  - Seja ela de decidibilidade;

Grafos na atualidade

- Muitos pesquisadores trabalham atualmente para criação de eficientes algoritmos em principalmente dois cenários:
  - Ambientes dinâmicos;
  - Ambientes estocásticos;
  - Ambientes distribuídos;

Universidade Federal de Alfenas

Algoritmos em Grafos

Aula 01 – História dos Grafos

Prof. Humberto César Brandão de Oliveira

Unifal MG

Universidade Federal de Alfenas